Associazione Italiana di Ricerca in Didattica della Matematica

40° SEMINARIO NAZIONALE DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA "GIOVANNI PRODI"

22-23 febbraio 2024

LITORANEO SUITE HOTEL – Viale Regina Elena, 22/24 – Rimini

Raccolta degli abstract estesi

COMITATO SCIENTIFICO E ORGANIZZATORE:
Benedetto Di Paola (Università di Palermo), Antonella Montone (Università di Bari), Elisabetta Robotti (Università di Genova).

Queste relazioni sono state preparate per i partecipanti al 40° Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica "Giovanni Prodi". È un documento ancora in bozza, che sarà rivisto anche tenendo conto dei contributi dei reactor e partecipanti.
Si prega di non diffonderlo.

Indice

L’uso di strumenti digitali nella progettazione didattica: una prospettiva degli insegnanti di matematica della scuola secondaria di secondo grado

Domenico Brunetto* e Umberto Dello Iacono**
* Politecnico di Milano; **Università della Campania "L. Vanvitelli"

Introduzione

Negli ultimi anni abbiamo assistito a rapidi cambiamenti tecnologici che hanno influenzato anche la didattica della matematica (ad esempio, Borba et al., 2016; Silverman & Hoyos, 2018). C’è stata un’ampia diffusione di piattaforme di streaming, come Google Meet, Zoom e Microsoft Teams, e di piattaforme collaborative, come Jamboard, Padlet, Miro e Perusall, che hanno consentito a numerosi utenti di connettersi e lavorare contemporaneamente. Durante la pandemia gli insegnanti (italiani) sono stati “costretti” a utilizzare tali piattaforme e ambienti digitali. Molti hanno semplicemente continuato a replicare a distanza le lezioni tradizionali tenute in presenza. Molti altri, che hanno trovato nella brusca interruzione delle lezioni in presenza uno stimolo per riflettere sul sistema didattico, hanno cambiato profondamente le loro pratiche di insegnamento (Albano et al., 2021). Alcuni hanno adottato lezioni trasmissive rispetto alle pratiche interattive utilizzate prima del periodo pandemico, mentre altri sono passati da approcci centrati sull'insegnante a quelli centrati sullo studente (Brunetto et al., 2022).

Il progresso tecnologico richiede sempre un cambiamento di paradigma sia per gli studenti che per gli insegnanti di matematica (Trouche et al., 2012) ed è in grado di influenzare sia il processo di apprendimento degli studenti sia il modo in cui gli insegnanti pianificano le loro attività didattiche (Clark-Wilson et al., 2014). Come conseguenza di questo sviluppo, si può affermare che le conoscenze tecnologiche digitali degli insegnanti si sono inevitabilmente ampliate. Ma in che modo gli insegnanti utilizzano le tecnologie digitali da un punto di vista didattico?

Contesto di ricerca/formazione

Questo lavoro di ricerca nasce da un contesto di Percorso di Sviluppo Professionale (di seguito PSP) online per insegnanti di matematica italiani della scuola secondaria di secondo grado. Nel 2021, in considerazione dello sviluppo tecnologico digitale degli ultimi anni, la Fondazione “I Lincei per la Scuola” ha attivato dei percorsi di formazione nell’ambito del Piano Nazionale Scuola Digitale (PNSD). Sono stati attivati 15 percorsi di formazione laboratoriale per insegnanti di ogni ordine e grado scolastico. Nell’area “Matematica” sono stati attivati quattro percorsi, pensati come laboratori nei quali gli insegnanti sono stati chiamati a progettare e sperimentare attività didattiche con tecnologie digitali. Gli autori di questo studio sono tuttora coordinatori di uno dei quattro percorsi di Matematica, il percorso B4-MATEC (Matematica per la Tecnica), destinato a insegnanti di matematica del triennio delle scuole secondarie di secondo grado, in particolare di Istituti Tecnici. Il percorso, della durata di 3 anni, si propone di introdurre la modellistica matematica supportata dalla tecnologia digitale per lo sviluppo di competenze matematiche (Niss & Hojgaard, 2019).

Il lavoro di ricerca che presentiamo fa riferimento ai primi due anni di PSP. All’inizio del primo anno, il numero di partecipanti attivi era di 40 insegnanti provenienti da tutta Italia (37,5% dal Nord

Italia, 15% dal Centro Italia, 32,5% dal Sud Italia, 15% dal Sud-Isole). Gli insegnanti hanno partecipato al percorso su base volontaria ed erano insegnanti con esperienza e formati da un punto di vista didattico. Infatti, più della metà (55%) aveva oltre 10 anni di esperienze di insegnamento. Quasi tutti (95%) avevano partecipato a corsi di formazione in didattica e la maggior parte di loro (67,5%) aveva partecipato a corsi di formazione in didattica della matematica.

Il PSP si è concentrato su un'attività dedicata alla modellazione matematica del GPS con l'aiuto della piattaforma online MIT App Inventor. In particolare, è stata considerata una semplificazione bidimensionale del problema della localizzazione di un punto nello spazio tridimensionale (attraverso ellissi). La Figura 1 mostra una panoramica dei diversi momenti in cui sono stati organizzati i primi due anni del PSP.

Figura 1. Panoramica temporale dei primi due anni del PSP

Nel momento M0, agli insegnanti è stato chiesto di rispondere ad un questionario iniziale riguardante la loro formazione, le esperienze professionali, le motivazioni, le aspettative relative al PSP e l'uso di risorse e strumenti digitali nelle loro pratiche didattiche. Successivamente, gli insegnanti sono stati coinvolti in un'attività di progettazione incentrata sull'ellisse. Il momento M1 è stato costituito da 5 laboratori di due ore ciascuno, durante i quali gli insegnanti hanno svolto in prima persona l'attività proposta, lavorando in piccoli gruppi con il supporto di tutors. Nel momento M2, che ha previsto 5 laboratori di due ore e una sessione plenaria di due ore, gli insegnanti hanno progettato dei percorsi didattici relativi all'attività proposta, da sperimentare nelle loro classi. Tale sperimentazione è avvenuta nel momento M3. Nel momento M4, durante 3 laboratori di due ore ciascuno, gli insegnanti hanno fornito un *feedback* sulla sperimentazione e hanno eventualmente rivisto/modificato le loro progettazioni.

Quadro teorico di riferimento

Nella ricerca in didattica della matematica, è ben noto che la pratica degli insegnanti (Da Ponte & Chapman, 2006) sia influenzata dalle loro conoscenze (ad esempio, Ben-Peretz, 2011) e convinzioni (ad esempio, McLeod, 1992). Ciò significa che la pratica dell'insegnamento può essere vista come frutto delle conoscenze e delle convinzioni degli insegnanti e, pertanto, i cambiamenti nella pratica degli insegnanti si ottengono attraverso i cambiamenti delle loro conoscenze e delle loro convinzioni. Tuttavia, il lavoro pioneristico di Guskey (1986) ha mostrato come la pratica possa avere effetto sulle convinzioni degli insegnanti. Recentemente, Brunetto et al. (2022) hanno confermato che i cambiamenti nella pratica, dovuti alla recente pandemia, hanno provocato cambiamenti nelle convinzioni e nelle conoscenze degli insegnanti e hanno proposto l'idea di "insegnamento come sistema" per modellare l'influenza reciproca tra pratica ("P"), sistema di convinzioni ("B") e conoscenze ("K"). Il modello P-B-K considera l'insegnamento come un sistema di elementi distinti ma intrecciati, tale che il cambiamento di un elemento può determinare un cambiamento negli altri. In questo nostro lavoro, noi condividiamo l'idea di natura sistemica dell'insegnamento, ma ci concentriamo maggiormente sulla componente ("K").

La pratica dell'insegnante ("P") è il lavoro che l'insegnante fa quando svolge un compito professionale (Da Ponte & Chapman, 2006), ad esempio, lo sviluppo della lezione, la selezione degli esempi, la scelta del formato della lezione, il linguaggio utilizzato, i compiti proposti e l'uso degli strumenti digitali.

Il sistema di convinzioni ("B") riguarda la dimensione affettiva dell'insegnante (McLeod, 1992). Le convinzioni implicano l'attribuzione di una sorta di verità o validità esterna a sistemi di proposizioni o ad altre configurazioni cognitive. Le convinzioni sono spesso altamente stabili, altamente cognitive e altamente strutturate – con aspetti affettivi intessuti in esse, che contribuiscono alla loro stabilizzazione" (DeBellis & Goldin, 2006, p. 135, trad. nostra).

La conoscenza dell'insegnante ("K") è "l'insieme di conoscenze professionali che comprende sia la conoscenza dei principi e delle competenze pedagogiche generali sia la conoscenza della disciplina da insegnare" (Ben-Peretz, 2011, p. 8, trad. nostra). A tal proposito, ci riferiamo al modello TPACK (Koehler et al., 2013; Niess, 2005) che aggiunge la conoscenza tecnologica (TK) alla conoscenza dei contenuti pedagogici (PCK) (Shulman, 1986). Nel contesto del nostro lavoro, la tecnologia è da intendersi con l'accezione di tecnologia digitale. Koehler et al. (2013) fanno luce sulle difficoltà dell'introduzione della tecnologia in classe e sostengono che gli aspetti cardine di un "buon insegnamento con la tecnologia" sono i contenuti, la pedagogia e la tecnologia, nonché le relazioni tra di essi. Secondo Koehler et al. (2013), il modello TPACK è composto da tre componenti principali: conoscenza pedagogica (PK), conoscenza disciplinare (CK), conoscenza tecnologica (TK), e dalle loro quattro intersezioni: conoscenza pedagogica disciplinare (PCK), conoscenza tecnologica disciplinare (TCK), conoscenza pedagogica tecnologica (TPK) e conoscenza tecnologica pedagogica disciplinare (TPACK).

La conoscenza pedagogica (PK) si riferisce alla conoscenza degli insegnanti sui processi, le pratiche e i metodi di insegnamento e apprendimento. Questa componente riguarda, tra l'altro, il modo in cui gli studenti apprendono, le abilità generali di gestione della classe, la pianificazione delle lezioni e la valutazione degli studenti. La conoscenza disciplinare (CK) si riferisce alla conoscenza da parte degli insegnanti della disciplina e di cosa insegnare rispetto al grado scolastico. Definire la conoscenza tecnologica (TK) è notoriamente difficile, a causa dei rapidi cambiamenti tecnologici e digitali. Di conseguenza, qualsiasi definizione di conoscenza tecnologica rischia di diventare obsoleta in breve tempo. La definizione utilizzata nel quadro TPACK è vicina a quella di *Fluency of Information Technology* (FITness), proposta dal Committee of Information Technology Literacy del National Research Council, che va oltre l'alfabetizzazione informatica e richiede anche una comprensione e padronanza delle tecnologie dell'informazione in modo sufficientemente ampio da poterle applicare in modo produttivo nella vita di tutti i giorni per l'elaborazione delle informazioni, la comunicazione e la risoluzione dei problemi. La conoscenza pedagogica disciplinare (PCK) è applicata a contenuti specifici dell'insegnamento. Secondo il quadro di Shulman (1986), si tratta della trasposizione di un sapere disciplinare, in cui gli insegnanti svolgono un ruolo cruciale nell'interpretare il contenuto, nel trovare metodi diversi per rappresentarlo e nell'adattare i materiali didattici in linea con le conoscenze pregresse degli studenti. La conoscenza PCK riguarda, tra l'altro, la valutazione dell'apprendimento, la creazione di collegamenti con altre discipline e l'analisi delle misconcezioni degli studenti. La conoscenza tecnologica disciplinare (TCK) implica "la comprensione del modo in cui la tecnologia e il contenuto si influenzano e si condizionano a vicenda" (Koehler et al., 2013, p. 16, trad. nostra). Ciò significa che gli insegnanti devono capire a quali tecnologie possono ricorrere per affrontare un argomento specifico e come l'argomento influenza la tecnologia e viceversa. La conoscenza tecnologica pedagogica (TPK) richiede una comprensione di come la tecnologia possa influenzare l'insegnamento e l'apprendimento. Ciò comprende la conoscenza delle possibilità e dei vincoli pedagogici degli strumenti tecnologici. La conoscenza TPK si rivela fondamentale nel contesto digitale perché molti software di uso comune (ad esempio, la suite MS Office) e molte piattaforme online sono state progettate per scopi generali e, dunque, gli insegnanti devono comprenderne le potenzialità e gli usi per scopi pedagogici. Infine, la conoscenza tecnologica pedagogica disciplinare (TPACK) "è una forma emergente di conoscenza che va oltre le tre componenti fondamentali. [...] La TPACK è la base di un insegnamento efficace con la tecnologia, che richiede una comprensione della rappresentazione dei concetti utilizzando le tecnologie, le tecniche pedagogiche che utilizzano le tecnologie in modo costruttivo per insegnare i contenuti [...]" (Koehler et al., 2013, p. 16, trad. nostra). Il concetto di *Technological Pedagogical Content Knowledge* (TPACK) dell'insegnante è legato al saper utilizzare il potenziale delle istanze tecnologiche a beneficio dell'esperienza di apprendimento degli studenti (Stoilescu, 2015). Lo sviluppo della conoscenza TPACK degli insegnanti è una parte importante dei programmi di preparazione degli insegnanti (ad esempio, Niess, 2005) poiché lo sviluppo della TPACK degli insegnanti è inseparabile dall'integrazione della tecnologia nella loro pratica. Anche se il modello TPACK non fornisce percorsi chiari per tale integrazione ed è stato raramente utilizzato nel caso di insegnanti esperti in servizio (Stoilescu, 2015), è uno dei modelli più importanti di competenza degli insegnanti per quanto riguarda l'uso didattico delle tecnologie digitali (Schmid et al., 2021).

Una prima ricerca

Questa prima ricerca ha avuto come obiettivo quello di capire in che modo gli insegnanti di matematica, in questo periodo post-pandemia, utilizzano le tecnologie digitali nelle loro pratiche didattiche e in che misura fanno riferimento a esse in fase di progettazione delle loro lezioni.

In particolare, ci siamo chiesti:

(D1) come gli insegnanti di matematica italiani usano le tecnologie digitali nelle loro pratiche didattiche?

(D2) sono formati sull'uso di tecnologie digitali da un punto di vista didattico?

(D3) in che misura fanno riferimento alle tecnologie digitali nella progettazione delle loro lezioni?

Aspetti metodologici della prima ricerca

Abbiamo condotto un'indagine iniziale (momento M0, Figura 1) con i 40 partecipanti al PSP attraverso un questionario iniziale individuale riguardante l'uso della tecnologia digitale. Il questionario era costituito da 7 domande così articolate:

- le prime 3 domande (a risposta chiusa) sulla loro formazione e le loro esperienze di insegnamento;
- la quarta domanda (a scala Likert) - *In che misura utilizzi le seguenti risorse o strumenti digitali (tue diapositive, le diapositive di altri, i tuoi video, video di altri, piattaforme online, software didattici) nella sua pratica didattica?* - e la quinta (a risposta aperta) - *Tra le piattaforme online, i software didattici e le altre risorse e strumenti digitali, indica quali utilizzi e in che modo* - sull'uso di risorse e strumenti digitali nelle loro pratiche didattiche;
- la sesta domanda (a risposta aperta) - *Perché ha deciso di partecipare a questa formazione?* - e la settima (a risposta aperta) - *Cosa vi aspettate da questa formazione?* - per indagare le motivazioni e le aspettative degli insegnanti relativamente al PSP.

Abbiamo analizzato le risposte di tipo aperto utilizzando una *deductive content analysis* (Mayring, 2015) basata sulle seguenti categorie: TK (se gli insegnanti, nelle loro risposte, fanno riferimento solo ad aspetti tecnologici), TPK (tecnologico-pedagogici), TCK (tecnologico-disciplinari) e TPACK (tecnologico-pedagogico- disciplinari). Più in dettaglio, per quanto riguarda la quarta domanda, abbiamo considerato la frequenza delle risposte per capire quale fosse il loro livello generale di conoscenze TK. La quinta domanda ci ha permesso di indagare più a fondo le conoscenze tecnologiche digitali, in accordo con il quadro teorico. A tal fine, abbiamo classificato le risposte alla quinta domanda rispetto alla tecnologia del modello TPACK, analizzando se la risposta di ciascun insegnante appartenesse a una delle 4 componenti TK, TPK, TCK e TPACK. La sesta e la settima domanda si riferiscono ad aspetti didattici generali e, pertanto, abbiamo classificato le risposte a queste domande in base a tutte e tre le componenti fondamentali del modello TPACK.

Risultati principali della prima ricerca

Tutti gli insegnanti hanno dichiarato di utilizzare le tecnologie digitali nella loro pratica didattica. Gli insegnanti hanno in generale una certa familiarità con gli strumenti digitali, in particolare per quanto riguarda le loro caratteristiche e funzionalità, ovvero conoscenze riguardanti la componente TK. I video autoprodotti sono le risorse digitali meno utilizzate dagli insegnanti nella loro pratica didattica. Questo non sorprende, visto l'impegno richiesto nella realizzazione di video rispetto alla produzione di slides. Quando agli insegnanti è stato chiesto esplicitamente di specificare come impiegano le risorse digitali, essi non hanno descritto né come le utilizzano da un punto di vista pedagogico, per migliorare l'apprendimento degli studenti (componente TPK) né in riferimento a specifici contenuti matematici (componente TCK). Più nel dettaglio, la maggior parte degli insegnanti (24 su 40) non ha fatto riferimento all'utilizzo della tecnologia nella loro pratica né relativamente al contenuto matematico né relativamente ad aspetti pedagogici. Solo 3 insegnanti si riferiscono ad aspetti tecnologico-pedagogico-disciplinari (componente TPACK). Le risposte alle domande 6 e 7 hanno rivelato che solo 6 insegnanti sentono la necessità di una formazione sull'utilizzo di tecnologie digitali e solo un insegnante su aspetti tecnologico-pedagogico-disciplinari (componente TPACK).

Albano et al. (2021) mostrano come molti insegnanti italiani durante la pandemia si siano comportati da "studenti", sentendo il bisogno di formarsi relativamente all'utilizzo di nuove tecnologie. La nostra ricerca mostra che, sebbene ad oggi, gli insegnanti si percepiscano competenti con le tecnologie, in realtà non sembrano adeguatamente formati sul loro uso da un punto di vista didattico e non avvertano la necessità di formarsi a tal riguardo. Da questa ricerca sembra emergere la seguente convinzione degli insegnanti: conoscere le caratteristiche e le funzionalità delle tecnologie (componente TK) è sufficiente per insegnare matematica con le tecnologie (Brunetto & Dello Iacono, 2023). Tale congettura è stata ulteriormente indagata nella seconda ricerca riportata di seguito.

Una seconda ricerca

I risultati della prima ricerca hanno permesso di affrontare le domande di ricerca (D1) e (D2), mentre la domanda (D3) ha richiesto un ulteriore approfondimento. Abbiamo esteso il lavoro di Brunetto e Dello Iacono (2023), con l'obiettivo di indagare l'uso delle tecnologie digitali da parte degli insegnanti italiani nelle loro attività di progettazione nonché valutare l'impatto del PSP sulle attività di progettazione degli insegnanti e sulle loro convinzioni relativamente all'uso delle tecnologie digitali. Più precisamente, abbiamo formulato le seguenti domande di ricerca:

(D3-bis) In che modo gli insegnanti italiani fanno riferimento alle tecnologie digitali nel progettare le loro attività didattiche all'inizio del PSP?

(D4) In che misura il PSP ha avuto un impatto sul modo in cui gli insegnanti progettano le loro attività utilizzando le tecnologie digitali?

Aspetti metodologici della seconda ricerca

Per rispondere alle domande D3-bis e D4, abbiamo analizzato le progettazioni degli insegnanti prodotte nei momenti M0 e M2 (vedi Figura 1). Le consegne date agli insegnanti sono state le seguenti:

Consegna M0: Descrivete brevemente la progettazione di una potenziale lezione in cui introducete l’ellisse ai vostri studenti. Descrivete i materiali e le risorse che utilizzereste e come. Riportate le competenze che la lezione mira a sviluppare negli studenti.

Consegna M2: Descrivete la progettazione di un percorso didattico, in cui indicate: grado scolastico, numero di studenti (eventualmente con bisogni educativi speciali); competenze che il vostro percorso educativo mira a sviluppare negli studenti; breve descrizione delle fasi del vostro percorso formativo. Per ogni fase indicate: i risultati di apprendimento che si intendono raggiungere; i contenuti matematici su cui ci si concentra; le competenze che quella fase mira a sviluppare negli studenti; le metodologie didattiche utilizzate e come; gli strumenti, i materiali e le risorse che utilizzate e come; perché avete deciso di utilizzare tali metodologie, strumenti, materiali e risorse; tempi di realizzazione; modalità di valutazione.

I prodotti degli insegnanti nei due diversi momenti sono stati analizzati utilizzando la metodologia di analisi descritta in precedenza. Abbiamo analizzato 27 progettazioni prodotte nel momento M0 e 14 prodotte nel momento M2 (13 insegnanti hanno abbandonato il percorso dal primo al secondo anno). In particolare, abbiamo analizzato le progettazioni in base alla componente TK (e alle sue sotto-componenti) del modello TPACK identificando gli estratti delle progettazioni che appartenevano a una delle 4 componenti TK, TPK, TCK e TPACK. Le progettazioni degli insegnanti, in accordo a Schmid et al. (2021), non sono da intendersi dati *self-reported* ma come parte della pratica dell’insegnante (P), visto come progettista di attività didattiche.

Risultati principali della seconda ricerca

Nelle progettazioni prodotte nel momento M0, la maggior parte degli insegnanti (58%) ha fatto riferimento alle tecnologie digitali in relazione a specifici contenuti matematici (TCK). Questo risultato potrebbe sembrare non in accordo con Brunetto e Dello Iacono (2023) (vedi sezione “Risultati principali della prima ricerca”). Tuttavia, in questa seconda ricerca (Bassi, Brunetto, & Dello Iacono, *submitted*), come precisato in precedenza, abbiamo analizzato le progettazioni degli insegnanti e non le loro risposte (*self-reported*) ad un questionario, come in Brunetto e Dello Iacono (2023). Inoltre, nella consegna data agli insegnanti, il riferimento al contenuto matematico nelle progettazioni è stato esplicitamente indicato (l’ellisse). Di conseguenza, sosteniamo che i risultati di questo nuovo studio non sono in disaccordo con Brunetto e Dello Iacono (2023), ma differiscono leggermente per la diversa natura dei dati raccolti. Sosteniamo, anzi, che la nuova analisi arricchisca i risultati di Brunetto e Dello Iacono (2023), visto che, anche in questo studio, un numero consistente di insegnanti si limita a citare un elenco di strumenti tecnologici (TK) senza costruire connessioni con i contenuti matematici e gli aspetti pedagogici. Pertanto, tali risultati non solo confermano la convinzione evidenziata da Brunetto e Dello Iacono (2023) ma la rafforzano, giungendo ad una nuova congettura: conoscere le caratteristiche delle tecnologie digitali è sufficiente per progettare attività didattiche con le tecnologie in relazione a specifici contenuti matematici. Tale congettura, come anticipato, necessita ovviamente di ulteriori indagini.

Nel passare dal momento M0 a quello M2, la percentuale di insegnanti che fanno riferimento alla conoscenza TK diminuisce (dal 42% al 21%), la percentuale di insegnanti che fanno riferimento alla conoscenza TCK rimane quasi la stessa (dal 58% al 57%), mentre aumenta considerevolmente la percentuale di insegnanti che fanno riferimento alla conoscenza TPK (dall'11% al 64%) e a quella TPACK (dal 15% al 94%). Siamo consapevoli del fatto che le dimensioni delle due serie di dati (in M0 e M2) sono diverse e che, di conseguenza, stiamo confrontando percentuali riferite a un numero diverso di insegnanti in M0 e M2. Inoltre, gli insegnanti che hanno partecipato al momento M2 sono probabilmente i più motivati, in quanto arrivati alla fine del secondo anno di PSP. Infine, dobbiamo sottolineare che le due consegne M0 e M2 erano diverse, in quanto il compito in M2 è stato fortemente guidato. Nonostante ciò, questa analisi sembra suggerire che il PSP abbia avuto un impatto positivo sul modo di progettare percorsi didattici da parte degli insegnanti. In termini di modello "P-B-K" (Brunetto et al., 2022), sembra che il PSP abbia avuto un impatto sull'elemento K (e in particolare sulla componente TPK) attraverso la pratica ("P"). Il PSP proposto ha avuto due principali peculiarità: (i) è durato per un lungo periodo di tempo; (ii) si è basato su attività laboratoriali e gli insegnanti sono stati coinvolti in un'"espansione della loro pratica" (Matos et al., 2009). Queste caratteristiche sono state fondamentali per produrre un cambiamento sia nell'elemento "P" sia nella possibile evoluzione delle convinzioni degli insegnanti, ossia nell'elemento "B", come evidenziato nell'analisi dei dati. La presente ricerca conferma quindi l'importanza di coinvolgere gli insegnanti in un programma di PSP strutturato, che preveda momenti laboratoriali in cui gli insegnanti progettano attività didattiche in modo collaborativo, tra di loro e con il tutor, che rappresentano occasioni per poter riflettere sulle implicazioni personali e professionali (Farmer et al., 2003).

Ricerche in corso e possibili sviluppi futuri

Nel momento M0, durante una plenaria, ai 40 partecipanti al PSP è stato chiesto di lavorare alla Consegna M0 (vedi sezione "Risultati principali della seconda ricerca"), ma in gruppi. A ciascun gruppo è stato chiesto (Consegna A) di riportare la propria progettazione in un post su Padlet e di colorare di rosso o di blu il post se la lezione era ritenuta principalmente incentrata sull'insegnante o sullo studente, rispettivamente. Successivamente, dopo una introduzione da parte nostra delle otto competenze matematiche previste dal quadro di Niss e Hojgaard (2019), abbiamo chiesto a ciascun gruppo (Consegna B) di eventualmente connettere il proprio post con le competenze che, secondo loro, la lezione mirava a sviluppare negli studenti. Nell'osservare quanto prodotto dai vari gruppi nella Consegna B, siamo rimasti particolarmente sorpresi dalla tendenza degli insegnanti, già osservata nella Consegna A, di associare competenze a lezioni completamente incentrate sull'insegnante e che non prevedevano, a nostro parere, nessun tipo di attività potenzialmente in grado di sviluppare tali competenze negli studenti.

Questo ci ha spinto a indagare riguardo alla comprensione e all'approccio degli insegnanti verso il concetto di competenza, in un contesto, quello del sistema educativo italiano, dove questo tema è centrale ormai da anni. Questa tendenza, secondo noi, identifica un fenomeno che abbiamo chiamato "competenze come etichette". Tale fenomeno sembra presentare analogie con ricerche anche al di fuori del contesto italiano. Ad esempio, Boesen et al. (2014) mostrano che potrebbe trattarsi di una questione più ampia legata ai modi in cui le competenze vengono presentate nei documenti educativi nazionali. Tuttavia, tale fenomeno potrebbe essere legato anche al modo in cui gli insegnanti affrontano possibili tensioni dovute o ad un cambiamento imposto da riforme istituzionali (Andrà et al., 2019) o più in generale alle convinzioni degli insegnanti. Infatti, al fenomeno "competenze come etichette" sembra contribuire anche la convinzione da parte degli insegnanti che i loro studenti non siano in grado di affrontare compiti che li coinvolgano attivamente e autonomamente. Tuttavia, riteniamo che tali compiti siano condizione necessaria per lo sviluppo delle competenze. Tale convinzione è emersa esplicitamente alla nostra richiesta fatta agli insegnanti di includere nelle loro progettazioni l'elaborazione di una relazione scientifica da parte degli studenti sulle attività sperimentate in classe. Se da un lato, molti insegnanti hanno dichiarato di essere "infastiditi" dalla nostra richiesta e, in riferimento ai propri studenti, hanno dichiarato che l'attività non era "alla loro portata", dall'altro, dopo aver visto gli elaborati prodotti, si sono sorpresi e ricreduti. Sembra, dunque, che la richiesta "forzata" della relazione scientifica abbia messo in crisi le convinzioni degli insegnanti sull'autonomia degli studenti. Ciò suggerisce che la richiesta di una pratica incentrata sull'autonomia degli studenti e sulla promozione del loro ruolo attivo potrebbe essere un modo efficace per contribuire a rimuovere una possibile barriera alla progettazione di attività che abbiano al centro lo sviluppo competenze.

I risultati delle ricerche sopra descritte e queste ultime considerazioni sembrano mostrare un cambiamento sia nelle conoscenze degli insegnanti sia nelle loro convinzioni. Questo cambiamento può essere attribuito al fatto che gli insegnanti sono stati "costretti", nell'ambito del PSP, a cambiare la loro pratica come *designer*. Si rende necessario, in futuro, condurre ulteriori studi per validare e/o confutare le congetture emerse sulle convinzioni degli insegnanti e per capire in che misura i cambiamenti rilevati durante il PSP siano stabili nel tempo. Inoltre, siamo interessati a definire quali siano le caratteristiche di un PSP online che possa essere d'impatto sulla pratica quotidiana dell'insegnante anche come designer.

Ringraziamenti

Ringraziamo la fondazione "I Lincei per la Scuola" per aver organizzato e finanziato il PSP. Ringraziamo Rosamaria Crisci e Giulia Bernardi per il loro prezioso lavoro di tutor durante il PSP. Ringraziamo Caterina Bassi sia per il suo lavoro di tutor, sia per il suo contribuito alla ricerca attraverso l'analisi dei dati.

Riferimenti

Albano, G., Antonini, S., Coppola, C., Dello Iacono, U., & Pierri, A. (2021). "Tell me about": a logbook of teachers' changes from face-to-face to distance mathematics education. *ESM*, 108(1), 15-34.

Andrà, C., Rouleau, A., Liljedhal, P., & Di Martino, P. (2019). An affective lens for tensions emerging from teacher professional development. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 2-6.

Bassi, Brunetto, & Dello Iacono (submitted).

Ben-Peretz, M. (2011). Teacher knowledge: What is it? How do we uncover it? What are its implications for schooling? *Teaching and Teacher Education*, 27(1), 3 9.

Boesen, J., Helenius, O., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Lithner, J., Palm, T., & Palmberg, B. (2014). Developing mathematical competence: From the intended to the enacted curriculum. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, 72-87.

Borba, M.C., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Llinares, S. & Aguilar, M.S. (2016). Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics education. *ZDM Mathematics Education* 48, 589–610.

Brunetto, D., Bernardi, G., Andrà, C., & Liljedahl, P. (2022). Teaching as a system: COVID-19 as a lens into teacher change. *ESM*, 110(1), 65–81.

Brunetto D., Dello Iacono U. (2023). Teaching mathematics with digital tools: an Italian high school teachers' perspective. *IJTME*, 30(4), 205–212.

Clark-Wilson, A., Aldon, G., Cusi, A., Goos, M., Haspekian, M., Robutti, O., & Thomas, M. O. J. (2014). The challenges of teaching mathematics with digital technologies - the evolving role of the teacher. In P. Liljedahl, C. Nichol, S., Oesterle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the joint meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 1, pp. 87–116). University of British Columbia.

Da Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practice. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 461–494). Sense Publishers.

De Bellis, V. A., & Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *ESM*, 63(2), 131- 147.

Farmer, J.D., Gerretson, H., & Lassak, M. (2003). What Teachers Take from Professional Development: Cases and Implications. *Journal of Mathematics Teacher Education* 6, 331–360.

Guskey, T. R. (1986). Staff development and the process of teacher change. *Educational researcher*, 15(5), 5-12.

Koehler, M. J., Mishra, P., & Cain, W. (2013). What is technological pedagogical content knowledge (TPACK)?. *Journal of education*, 193(3), 13-19.

Matos, J. F., Powell, A., Sztajn, P., Ejersbø, L., Hovermill, J., & Matos, J. F. (2009). Mathematics teachers' professional development: Processes of learning in and from practice. *The professional education and development of teachers of mathematics: The 15th ICMI study*, 167–183.

Mayring, P. (2015). Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures. In: Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., Presmeg, N. (eds), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education.* Springer.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. In Grouws, D.A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching* (pp. 575–596). MacMillan.

Niess, M. L. (2005). Preparing teachers to teach science and mathematics with technology: Developing a technology pedagogical content knowledge. *Teaching and teacher education*, 21(5), 509-523.

Niss, M., & Hojgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *ESM*, 102, 9-28.

Schmid, M., Brianza, E., & Petko, D. (2021). Self-reported technological pedagogical content knowledge (TPACK) of pre-service teachers in relation to digital technology use in lesson plans. *Computers in Human Behavior*, 115, 106586.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educ. Researcher,* 15(2), 4–14.

Silverman, J., & Hoyos, V. (Eds.) (2018). Distance learning, e-learning and blended learning in mathematics education: International trends in research and development. *ICME13 monographs*. Springer.

Stoilescu, D. (2015). A critical examination of the technological pedagogical content knowledge framework: Secondary school mathematics teachers integrating technology. *Journal of Educational Computing Research*, 52(4), 514-547.

Trouche, L., Drijvers, P., Gueudet, G., Sacristán, A.I. (2012). Technology-Driven Developments and Policy Implications for Mathematics Education. In M. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, F. Leung (Eds). *Third International Handbook of Mathematics Education*, vol 27. Springer.

Il costrutto di competenza matematica per riflettere sulla valutazione di classe

Alice Lemmo
Università dell'Aquila

Introduzione al problema di ricerca

La valutazione riveste un tema centrale nella ricerca educativa, didattica e pedagogica; dagli anni Sessanta, innumerevoli ricercatori nazionali e internazionali afferenti a diversi ambiti di ricerca hanno proposto definizioni ricche e variegate, declinando il processo valutativo rispetto a diverse forme e/o agli obiettivi che assume nei molteplici contesti (Nortvedt & Buchholtz, 2018). In questo contributo non ci si prospetta di prendere una posizione in merito ad una particolare definizione o proporne una specifica al contesto di studio ma si tenta di riflette sulla v*alutazione di classe in matematica* intesa come quel processo attraverso il quale docenti e studenti strutturano e/o partecipano ad attività in cui si raccolgono prove dell'apprendimento e si utilizzano per prendere decisioni sul processo di insegnamento-apprendimento (Goos, 2020).

Van den Heuvel-Panhuizen e Becker (2003) affermano che l'uso dei test e prove scritte a scuola sta diventando sempre più comune in molti Paesi; in Italia, negli ultimi due decenni, le prove scritte e i test sembrano rappresentare il principale strumento di valutazione di classe in matematica. In uno studio recente, Amado e Morselli (in press) mostrano che, nonostante i docenti italiani riconoscano l'importanza della valutazione formativa, nella maggior parte dei casi, essi prediligono prove in forma scritta con denotazione sommativa. Questo movimento potrebbe rappresentare l'inizio della standardizzazione in cui le prove scritte misurano solo il numero di risposte corrette, mancanti o errate. Questo approccio, se non controllato, potrebbe fornire informazioni parziali su come far progredire il processo di insegnamento-apprendimento (van den Heuvel-Panhuizen e Becker, 2003).

Il contributo si inserisce in un problema di ricerca ampio che si propone da una parte di indagare il modello valutativo di riferimento utilizzato dai docenti per costruire e valutare le prove scritte di matematica; dall'altra di presentare un nuovo modello valutativo che permetta di produrre prove scritte che abbiano una valenza formativa (Lemmo, in press). Di seguito si tratterà una parte preliminare del problema relativo all'analisi dei compiti maggiormente utilizzati dai docenti per la valutazione scritta in matematica. L'obiettivo è quello di individuare evidenze che permettano di far luce sui modelli valutativi adottati dai docenti italiani per la valutazione di classe in matematica.

Aspetti teorici di riferimento

Per chiarezza terminologica, si pone in evidenza la distinzione tra *prova* e *compito* di matematica. In questo contributo, il termine prova scritta di matematica è utilizzata per riferirsi ad una collezione di compiti di matematica somministrata dai docenti agli studenti per scopi valutativi. A loro volta, i compiti sono definiti in riferimento a quello che in letteratura viene denominato *task* (Margolinas et al., 2013). Il compito è quindi una consegna che presenta una o più richieste poste agli studenti dal docente che riguardano un certo contenuto o tema matematico. Un compito potrebbe essere di tipo riproduttivo come la soluzione di un esercizio già affrontato in classe, l'enunciazione di una definizione presentata dal docente e così via oppure di tipo produttivo come la richiesta di costruire e/o rappresentare oggetti matematici in situazioni non note, argomentare, dimostrare e così via.

Per quanto riguarda l'uso delle prove scritte da parte dei docenti, Drüke-Noe (in press) distingue due fasi consecutive: la fase di progettazione (*design*) e quella di misurazione (*evaluation*). Durante la fase di progettazione, il docente seleziona i compiti da inserire nella prova, decide la loro sequenza e il tempo da dare a disposizione per completarli. Nella fase di misurazione, invece, valuta gli elaborati degli studenti, assegna punteggi o un voto ed eventualmente aggiunge osservazioni qualitative riferite a tutta la prova o al singolo compito. L'autrice mette in risalto che esistono diversi fattori che possono influenzare la fase di progettazione prima e quella di misurazione poi; ad esempio, le linee guida ministeriali, i libri di testo, gli obiettivi didattici, le valutazioni standardizzate, i risultati della ricerca e così via; tutti questi contribuiscono a definire un modello di riferimento, esplicito o implicito, che il docente adotta nel processo valutativo. Il modello di riferimento valutativo proprio del docente è strettamente interconnesso alla sua aspettativa di successo in matematica. Come sostiene Drüke-Noe (in press), infatti, tale modello è utilizzato dal docente per inquadrare e affrontare determinati fenomeni, situazioni o problemi, allo scopo di osservare e interpretare le difficoltà degli studenti, raggiungere una certa performance, creare contesti adatti, strutturare e attivare interventi didattici. Per questo motivo è ragionevole supporre che ci sia una stretta connessione tra il modello di riferimento valutativo e il modello di competenza in matematica propri del docente.

In primi studi condotti, si è fatto riferimento alla natura multidimensionale della matematica (Fandiño Pinilla, 2020), sfruttando ciascuna componente come spunto di riflessione in ambito valutativo (Lemmo 2023). Per gli obiettivi di questo studio era però necessario individuare un costrutto di competenza abbastanza ricco da essere rilevante in una situazione complessa, ma allo stesso tempo mirata a ridurre questa complessità. Il modello di competenza matematica descritto da Niss e Højgaard (2019) sembra offrire maggiori opportunità rispetto agli scopi di questo studio.

Nel definire le competenze matematiche, gli autori affermano che un obiettivo primario dell'attività matematica è "porre e rispondere a domande in o per mezzo della matematica" (p. 15, trad. It a cura dell'autrice). Questa abilità ha quattro diverse componenti: pensiero matematico fondamentale; porre e risolvere problemi matematici; trattare modelli matematici e modellizzazione; intraprendere ragionamenti matematici. Inoltre, lo svolgimento di un'attività matematica implica la "gestione del linguaggio, dei costrutti e degli strumenti matematici" (p. 17, trad. It a cura dell'autrice), che ha di nuovo quattro diverse componenti: gestire le rappresentazioni matematiche; trattare con simboli e formalismi matematici; intraprendere e produrre un'argomentazione matematica; utilizzare ausili e strumenti matematici. Ciascuna componente afferisce ad una competenza con caratteristiche proprie. Gli autori rappresentano le 8 competenze matematiche come i petali di un "fiore". Ogni petalo si distingue dagli altri ma si intreccia con ciascuno. Queste intersezioni sono intenzionali perché ogni competenza non è slegata dalle altre ma al tempo stesso assume una sua connotazione specifica.

È opportuno notare che in questa concettualizzazione, le competenze sono di natura puramente cognitiva. Anche se gli autori riconoscono che i tratti affettivi, disposizionali e volitivi degli individui influenzano le attività matematiche, essi sono "funzioni multivariate di una moltitudine di variabili di sfondo, della traiettoria di vita e delle esperienze prodotte all'interno e all'esterno della scuola e dell'istruzione, questi tratti sono altamente individualizzati" (Niss & Højgaard, 2019, p. 18, trad. It a cura dell'autrice) e per questi scelgono di non tenerli in considerazione.

Un aspetto che rende questo modello ulteriormente adatto agli scopi di questa ricerca è la presenza di tre dimensioni che indicano il grado di possesso di una competenza da parte di un individuo. Gli autori, infatti, mettono in risalto l'impossibilità di poter giudicare/misurare il possesso o meno da parte di un soggetto di ciascuna di queste otto competenze ma propongono appunto delle dimensioni, il cui intreccio potrebbe suggerire il livello di possesso di ciascuna competenza. Il grado di copertura (*degree of coverage*) di una competenza è la misura in cui tutti gli aspetti che inquadrano la competenza fanno parte del bagaglio dell'individuo. Il raggio d'azione (*radius of action*) rappresenta il tipo di circostanze e situazioni diverse in cui l'individuo può attivare con successo la competenza. Infine, il livello tecnico (*technical level*) indica il livello di sofisticazione dei concetti matematici, dei risultati, delle teorie e dei metodi che l'individuo può mettere in atto quando esercita la competenza.

In questa prospettiva, i compiti di matematica potrebbero essere analizzati in riferimento alle competenze che lo studente deve mobilitare per rispondere, individuando anche un livello rispetto alle dimensioni. Potrebbe, però, risultare complesso collegare tali dimensioni ad una prova scritta di matematica. A questo proposito, la nuova ordinanza ministeriale per la valutazione nella scuola primaria (n.172 del 04 dicembre 2020) individua 4 dimensioni:

a) l'*autonomia* dell'alunno nel manifestare l'apprendimento per uno specifico obiettivo educativo
b) il *tipo di situazione* (conosciuta o sconosciuta) all'interno della quale lo studente rivela di aver raggiunto l'obiettivo.
c) le *risorse* mobilitate per portare a termine il compito che possono essere appositamente predisposte dall'insegnante o prevedere una rielaborazione personale
d) *continuità* nella manifestazione dell'apprendimento.

Dimensioni		***Raggio di azione***	***Livello tecnico***	***Grado di copertura***	
OM 172		***Tipo di situazione***	***Risorse***	***Autonomia***	***Continuità***
Livello	**4**	Note / Non Note	Personali / Date dal docente	Sì	Sì
	3	Note	Personali / Date dal docente	Sì	Sì
		Non Note	Personali / Date dal docente	No	Sì
	2	Note	Date dal docente	Sì	No
		Note	Date dal docente	No	Sì
	1	Note	Date dal docente	No	No

Tabella 1: descrizione dei livelli in linea con l'ordinanza ministeriale per la valutazione nella scuola primaria (n.172 del 04 dicembre 2020) e le dimensioni di competenza di Niss e Højgaard (2019).

Le dimensioni dell'ordinanza possono essere messe in relazione con le dimensioni di competenza descritte in precedenza (Niss e Højgaard, 2019). In particolare, autonomia e continuità possono essere parte del grado di copertura; il tipo di situazione si potrebbe riferire al raggio di azione e le risorse al livello tecnico (Tabella 1). La combinazione tra le dimensioni e le otto competenze dovrebbe permettere di indagare la natura e la varietà dei compiti presentati per ciascuna competenza. In altri termini, essa dovrebbe permettere, ad esempio, di osservare se la prova nel suo complesso si riferisce o meno a tutte le competenze e se permette di far luce su tutti i possibili livelli di competenza oppure si limita ad un livello in particolare.

L'obiettivo del contributo è utilizzare il costrutto di competenza matematica per mettere in luce il modello di riferimento valutativo dei docenti. In particolare, il costrutto di competenza verrà utilizzato per analizzare i compiti che i docenti propongono nelle prove scritte di matematica, permettendo di esplorare alcuni aspetti del modello valutativo adottato in fase di progettazione.

Il contesto di studio

Lo studio è stato inserito in diversi percorsi di formazione per docenti in servizio in scuole di ogni ordine e grado nell'anno 2023, tutti riguardanti il tema della valutazione in matematica. I percorsi hanno avuto una durata variabile: in base alle disponibilità di tempo, sono stati strutturati in una o più fasi in cui si sono alternati momenti di condivisione, sessioni in plenaria e laboratori. In questo contributo verranno analizzati e discussi i dati raccolti nella prima fase, comune a tutti i percorsi di formazione. In dettaglio, la fase uno è stata implementata prima di cominciare il percorso di formazione. Nella prima attività è stato chiesto ai docenti (divisi in piccoli gruppi) di condividere dei compiti attraverso Padlet: "Condividete almeno 3 compiti irrinunciabili in prova di valutazione scritta sui numeri razionali. Potete condividere compiti già utilizzati in passato o costruirne dei nuovi insieme". Il Padlet era stato impostato in modo che i compiti condivisi fossero visibili solo al formatore, ciascun gruppo poteva vedere solo i propri post. Dopo questo primo momento di lavoro, tutti i post di Padlet sono stati resi visibili a tutti ed è stata fornita una seconda consegna: "Commentate i compiti condivisi dagli altri gruppi. Commentate solo quelli che apprezzate, esplicitandone il motivo". Entrambe le attività sono state svolte in 30/40 minuti.

Hanno partecipato 188 docenti dalla scuola primaria alla scuola secondaria di II grado da diverse regioni italiane. Circa la metà dei docenti coinvolti (97) è in servizio presso la scuola secondaria di I grado; la restante parte, si divide tra la scuola primaria (45) e la scuola secondaria di II grado (46).

Analisi dei risultati iniziali

In questa sezione vengono descritti i risultati preliminari dello studio, facendo luce sull'analisi dei compiti condivisi dai docenti e sugli apprezzamenti ricevuti da ciascuno di loro.

Categoria di compiti	Prevalentemente condivisa da	Prevalentemente apprezzata da
Frazioni come parte-tutto.	Primaria e sec. di I gr.	Primaria e secondaria di I grado
Problemi verbali	Sec. di I e II gr.	Secondaria di I e II grado
Linea dei numeri	Ogni ordine grado	Pochi di ogni ordine e grado
Confronto/equivalenza	- Confronto secondaria I e II gr. - Equivalenza primaria e sec. di I gr.	Pochi di ogni ordine e grado

Tabella 2: Categorie riscontrate tra i compiti condivisi e apprezzati

I compiti sono stati suddivisi in 4 categorie. In Tabella 2, sono elencate le categorie e indicato il grado di riferimento dei docenti che più le hanno condivise e apprezzate.

Per esplicitare le modalità di analisi, di seguito discutiamo nel dettaglio la prima categoria, Successivamente presenteremo il panorama generale delle altre categorie (Tabella 3).

La prima categoria di compiti è stata la più condivisa e apprezzata dai docenti del primo ciclo. A questa categoria appartengono due topologie di compiti: la prima chiede di determinare il valore di una frazione rappresentata come rapporto tra superficie colorata e superficie totale di una figura (Figura 1a e b); il secondo chiede di colorare parte di una figura mantenendo il rapporto tra la superficie della parte colorata e la superficie totale equivalente ad una frazione data. In tutti gli esempi raccolti, si fa riferimento a numeri razionali minori di 1; per questo la categoria dei compiti è stata nominata *Frazioni come parte-tutto.* Solo 5 della totalità dei gruppi coinvolti (28) non presenta compiti di questa categoria, prevalentemente gruppi composti dai docenti della secondaria di II grado.

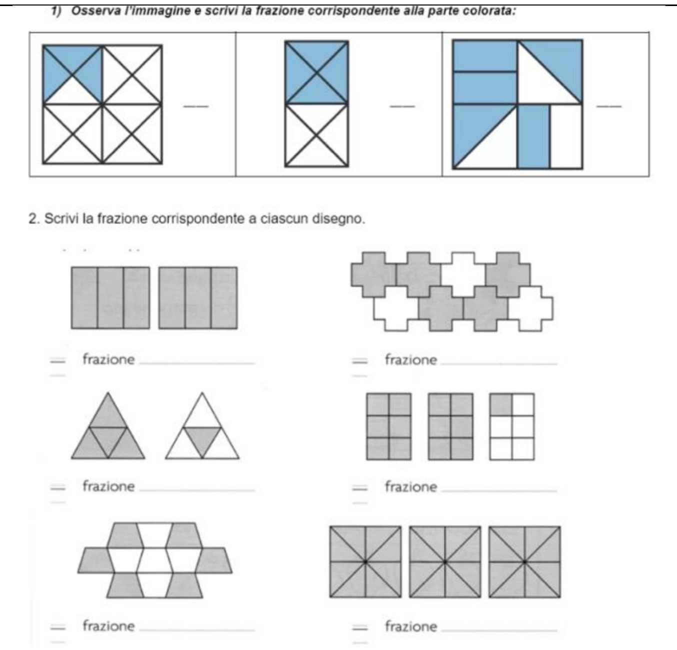


Figura 1a: scomposizione della superficie in parti congruenti o equivalenti

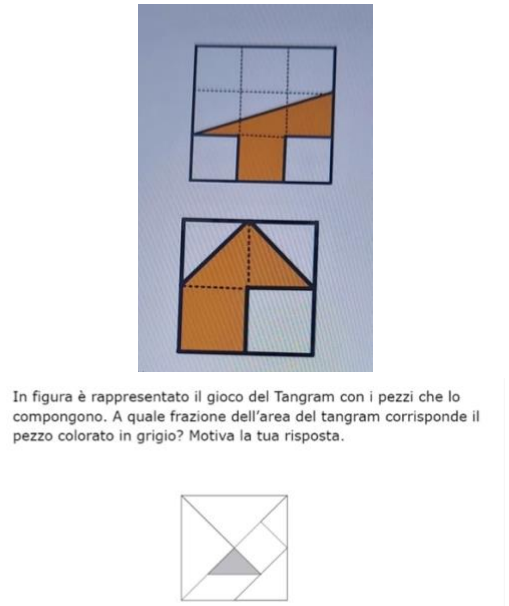


Figura 1b: scomposizione della superficie in parti non equivalenti

Figura 2: esempi di compiti della categoria *Frazioni parte tutto*

Circa la metà dei gruppi dei docenti coinvolti propone un compito della prima tipologia, la quale raccoglie l'apprezzamento da parte di tutti gli altri gruppi. Gli apprezzamenti sono in genere legati al frequente utilizzo di questo genere di compiti; si riscontrano anche alcuni commenti legati all'originalità del compito, nel momento in cui vengono presentate figure non standard o scomposizioni in parti non equivalenti (Figura 1b).

In tutti gli esempi delle due topologie, non si riscontrano richieste di motivazione o argomentazioni particolari. In un solo quesito (Figura 1b) viene chiesto di motivare la risposta. In riferimento alle competenze, questa tipologia di compiti si può collegare alle due competenze relative alla gestione delle rappresentazioni e del simbolismo e formalismo matematico. Mentre nel caso del simbolismo e formalismo matematico, il compito si limita a presentate risorse predisposte dal docente in situazioni assolutamente note (lo dimostra anche la grande familiarità espressa nei commenti), per quanto riguarda le rappresentazioni, ci sono esempi di situazioni che potrebbero non essere note (figure non standard oppure scomposizioni non equivalenti), chiedendo di mobilitare anche risorse personali.

In Tabella 2 viene presentata una sintesi dell'analisi dei compiti condivisi e commentati mettendo in risalto il collegamento con i costrutti teorici di riferimento.

	Competenze	**Categoria di compiti**	**Livello di riferimento**
Gestire il linguaggio, i	Gestire le rappresentazioni matematiche	• *Frazioni come parte-tutto.* • *Linea dei numeri* • Confronto/equivalenza	• 2-3 • 2-3 • 1-2

	Trattare con simboli e formalismi matematici	• *Frazioni come parte-tutto.* • *Problemi verbali* • *Linea dei numeri* • Confronto/equivalenza	• 1-2 • 1-2 • 1-2 • 2-3
	Intraprendere e produrre un’argomentazione matematica	• *Problemi verbali* • Confronto/equivalenza	• 2-3 • 1-2
	Utilizzare ausili e strumenti matematici	• *Problemi verbali* • *Linea dei numeri* • Confronto/equivalenza	• 2-3 • 1-2 • 1-2
Porre e rispondere a domande in o per mezzo della matematica	Essere predisposti al pensiero matematico		
	Intraprendere ragionamenti matematici		
	Trattare modelli matematici e modellizzazione	• *Problemi verbali*	• 1-2
	Porre e risolvere problemi matematici	• *Problemi verbali*	• 1-2

Tabella 3: sintesi delle analisi dei dati raccolti

Visto il contesto di raccolta dati, alcune dimensioni non sono state essere indagate: i livelli si riferiscono solo al tipo di situazione e alle risorse da mobilitare; il grado di copertura, collegato ad autonomia e continuità, non sarà oggetto di analisi.

Discussione e prime conclusioni

Questo contributo si inserisce in un problema di ricerca ampio che riguarda la valutazione scritta di matematica. L’obiettivo generale è quello di supportare i docenti nella pratica valutativa delle prove scritte, fornendo strumenti utili per la progettazione e la misurazione delle prove (Lemmo, in press; 2023). Questo obiettivo può essere raggiunto conoscendo il modello implicito o esplicito che ciascun docente possiede, per strutturare un intervento di formazione efficace. Questo contributo presenta un obiettivo preliminare che mira a conoscere tale modello. In particolare, le prime conclusioni permettono di avvicinarsi al modello valutativo di alcuni docenti italiani attraverso le analisi dei compiti che essi inseriscono nelle prove scritte e quelli che apprezzano tra le proposte dei colleghi.

Riguardo gli apprezzamenti, i commenti sono stati pochi e si riferiscono prevalentemente a compiti familiari. Questo fatto potrebbe suggerire che ciascun docente incontra delle difficoltà nel momento in cui si imbatte in compiti che non condivide nella propria pratica scolastica. In aggiunta, i docenti generalmente commentano solo compiti del proprio grado scolastico, senza sbilanciarsi su gradi diversi dal loro. Un ulteriore aspetto interessante riguarda le ultime due categorie (linea dei numeri e confronto/equivalenza) che hanno ricevuto pochi commenti. Si tratta delle poche categorie in cui è stato riconosciuto un livello di competenza superiore ad 1-2. Si potrebbe supporre che i docenti incontrino difficoltà nel produrre apprezzamenti su compiti, sebbene familiari perché ampiamente condivisi, che mettono in campo più competenze su diversi livelli.

Per quanto riguarda le competenze, sono completamente assenti due delle competenze legate al *Porre e rispondere a domande in o per mezzo della matematica*, le altre due si riferiscono a situazioni generalmente note in cui sono sufficienti le risorse presentate dai docenti. Questo è confermato anche dal fatto che i compiti proposti rispetto a queste componenti sono prevalentemente di tipo riproduttivo e non produttivo: in alcuni casi lo studente deve motivare o descrivere il processo risolutivo che riguarda il calcolo di una percentuale o di una frazione di una quantità; in altri, invece, egli o ella deve ripetere definizioni e/o proprietà già affrontate o descritte dal docente o presenti nei libri di testo. Questo è in linea con alcuni recenti lavori: l'analisi dei compiti da parte di esperti fa emergere un limitatissimo spettro di compiti in termini di tipologia e competenze coinvolte (Drüke-Noe, in press). Sono completamente assenti compiti che riguardano livelli alti di competenze: a giudicare dai commenti, infatti, i compiti proposti sono familiari a tutti i docenti (anche se provenienti da scuole e contesti diversi), suggerendo che si tratta di compiti usuali nella pratica scolastica italiana che quindi riguardano situazioni note o in cui sia necessario abilitare risorse già predisposte dal docente.

Rispetto alle implicazioni future e al problema di ricerca generale, gli strumenti di analisi potrebbero essere utili non solo in fase di analisi dei compiti ma anche nelle fasi di progettazione e misurazione. Ad esempio, progettare dei compiti tenendo conto di competenze e livelli potrebbe permettere di aumentare lo spettro di attività presentate sia nella pratica didattica sia in quella valutativa. In aggiunta, in fase di misurazione, questo obbligherebbe il docente ad andare oltre le conoscenze dei singoli contenuti ma di esplorarli attraverso processi variegati che vanno dalla conoscenza dei saperi all'argomentazione, dall'uso degli algoritmi all'argomentazione. Questo può e deve avere un risvolto positivo anche sullo studente, il quale o la quale può ricevere un feedback sui propri punti di forza e debolezza, rispetto ai livelli raggiunti per ciascuna competenza a prescindere dal numero di errori commessi o omissioni di risposta. Tali obiettivi sono raggiungibili integrando al costrutto di competenza un radicale cambiamento di prospettiva sull'errore: il docente dovrebbe partire dalle produzioni degli studenti e non soffermarsi sulle carenze, aprendosi all'interpretazione (Di Martino, Mellone e Ribeiro, 2019).

Seppur si tratti di uno studio preliminare, esistono già diversi limiti legati all'analisi dei dati: per un'analisi approfondita sarebbe necessario conoscere a pieno le realtà di classe in cui lavora il docente. In questo modo, sarebbe possibile evidenze su quali siano effettivamente le situazioni (note oppure no) e le risorse necessarie per affrontare i compiti (predisposte dal docente o meno). In aggiunta, alcuni aspetti legati alle pratiche didattiche potrebbero suggerire se implicitamente il docente richiede per ogni compito un'argomentazione, arricchendo così la presenza di alcune competenze per ora apparentemente ignorate. In aggiunta, l'analisi dei singoli compiti non può essere paragonata a quella della prova nel suo complesso. In questo caso, le analisi sono state svolte su una collezione di quesiti scollegati tra di loro: sarebbe opportuno, invece, analizzare la prova nel suo complesso per analizzare se e come tutte le competenze sono mobilitate, se esiste un equilibrio tra loro e i livelli di riferimento. Infine, solo l'analisi combinata delle fasi di progettazione e misurazione permetterebbe di proporre conclusioni più forti e solide sui modelli valutativi dei docenti.

Bibliografia

Amado, N., & Morselli, F. (in press) Teachers' beliefs about assessment: a study in Italy and Portugal. In *Proceedings of the thirteen Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Budapest.

Di Martino, P., Mellone, M., & Ribeiro, M. (2019). Interpretative knowledge. *Encyclopedia of mathematics education*. Cham: Springer, 10, 978-3.

Drüke-Noe, C. (in press) Design Principles and Task Characteristics of Mathematics Class Tests. In Proceedings of the thirteen *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Budapest.

Fandiño Pinilla, M. I. (2020). *Diversi aspetti che definiscono l'apprendimento e la valutazione in matematica*. Bonomo.

Goos, M. (2020). Mathematics classroom assessment. In *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 572-576). Cham: Springer International Publishing.

Lemmo, A. (in press) Mathematical written tests as formative assessment practice. In *Proceedings of the thirteen Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Budapest.

Lemmo, A. (2023) Le prove INVALSI come strumento di riflessione per una valutazione multidimensionale in matematica. *Nuova Secondaria*, n. 5, gennaio 2023 - anno XL -, 88-93. ISSN 1828-4582

Margolinas, C. (2013). Task Design in Mathematics Education. *Proceedings of ICMI Study 22*. ICMI Study 22.

Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 9-28.

Nortvedt, G. A., & Buchholtz, N. (2018). Assessment in mathematics education: Responding to issues regarding methodology, policy, and equity. *ZDM*, 50(4), 555-570.

van den Heuvel-Panhuizen, M., Becker, J. (2003). Towards a Didactic Model for Assessment Design in Mathematics Education. In: Bishop, A.J., Clements, M.A., Keitel, C., Kilpatrick, J., Leung, F.K.S. (eds) *Second International Handbook of Mathematics Education*. Springer International Handbooks of Education, vol 10. Springer, Dordrecht.

La Didattica della Matematica innovativa e integrata con le discipline professionali: un forte strumento di contrasto alla dispersione scolastica negli Istituti Professionali

Michele Giuliano Fiorentino
Università degli Studi di Bari - Aldo Moro

Introduzione

Obiettivo principale della ricerca presentata è quello di affrontare la problematica della dispersione scolastica negli istituti professionali, progettando percorsi formativi co-disciplinari, co-progettati e co-condotti in classe da insegnanti di Matematica e insegnanti di materie professionalizzanti per far emergere il legame esistente tra la materia professionale e la Matematica. Per coinvolgere gli studenti più a rischio dispersione scolastica, si propone una Matematica "di senso" (Wake, 2014) rispetto alla materia professionale e viceversa si vuole dare significato alla materia professionale attraverso la Matematica. La Ricerca mira a dimostrare come sia indispensabile l'integrazione fra contenuti disciplinari e discipline professionali, che permetta di cogliere l'importanza dello studio di discipline apparentemente lontane dalle professioni, quali per esempio la Matematica e la Lingua Italiana, finalizzate all'acquisizione di competenze professionali e al miglioramento della qualità dello sviluppo professionale, obiettivo del percorso di studi. Spesso gli studenti di questi istituti, soprattutto nel primo biennio, testimoniano il loro disagio scolastico e formativo che mette in crisi l'intera struttura della formazione istituzionale professionale. Ulteriore supporto a tale obiettivo è evidenziato dalla contraddizione che emerge dai documenti ministeriali. Da un lato nelle Linee guida del M.I.M. (2019), è data centralità a temi come l'algebra e la geometria euclidea, senza espliciti riferiti a competenze specifiche; dall'altro, nelle Competenze Specifiche di Riferimento si da notevole enfasi alle discipline professionali trascurando le indicazioni sui legami tra tali competenze e la Matematica. Di conseguenza, gli stessi insegnanti di Matematica e di materie professionalizzanti, non riescono a coordinarsi per attuare una Didattica integrata tra le discipline. Sembra quindi necessario coinvolgere gli insegnanti di Matematica e di altre discipline in un servizio formativo innovativo, perché si suppone che da un lato gli insegnanti di Matematica non sappiano quali specifici contenuti matematici siano utili per le discipline professionali, dall'altro gli insegnanti di materie professionalizzanti hanno bisogno di una formazione specifica sulla Matematica necessaria per affrontare alcuni argomenti della loro disciplina. In questo articolo si presentano le analisi dei potenziali semiotici degli artefatti e alcuni risultati preliminari relativi alla realizzazione di uno dei tre interventi co-disciplinari che hanno coinvolto Matematica e Moda, Matematica e Chimica e Matematica e Marketing. Nelle sperimentazioni sono state coinvolte tre classi di circa 20 studenti, tra i quali 5-7 studenti segnalati essere a rischio dispersione scolastica.

Quadro teorico di riferimento

Secondo Wake (2014), è particolarmente importante "partire [...] dalla comprensione emergente delle attività matematiche nei contesti lavorativi" per fornire nuove intuizioni sul ruolo della Matematica e sulla sua duplice natura sia come area di studio che come strumento sempre più diversificato con applicazione in e attraverso molti aspetti della vita umana. In questi casi l'apprendimento può essere mediato da Boundary Objects-Artefacts (BOA) appositamente creati, che sono sufficientemente adatti per mantenere il loro significato nelle discipline coinvolte, ma anche abbastanza flessibili da essere utilizzati efficacemente in ciascuna di esse (Star, 1995). Questi BOA hanno la funzione di coordinare le diverse discipline coinvolte, anche se le pratiche professionali che li utilizzano sono diverse. Per individuare tali BOA sembra necessario riunire membri di diverse discipline - comunità di pratica - con lo scopo di realizzare un oggetto/compito comune. Muoversi in questa direzione richiede un approccio di indagine di co-apprendimento, in cui gli insegnanti coinvolti imparano insieme attraverso l'indagine, laddove l'indagine è uno strumento di mediazione. Condividendo il pensiero di Wagner (1997, p. 16), in un accordo di co-apprendimento,

> "i ricercatori e i professionisti partecipano entrambi ai processi educativi e ai sistemi scolastici. Entrambi sono impegnati nell'azione e nella riflessione. Lavorando insieme, ognuno potrebbe imparare qualcosa sul mondo dell'altro. Di pari importanza, tuttavia, ognuno può imparare qualcosa di più sul proprio mondo e sui suoi collegamenti con le istituzioni e la scuola".

Uno degli obiettivi di questo approccio, è che ricercatori e insegnanti lavorino insieme per esplorare e sviluppare l'apprendimento e l'insegnamento della Matematica. Nel nostro caso, utilizzando un BOA derivante dal mondo professionale, si mira ad approfondire e dare significato a concetti matematici con l'aiuto dell'altra disciplina coinvolta e viceversa. Il quadro teorico del Teaching for Robust Understanding (TRU) propone una concezione della Matematica "empirica", alternativa alla visione della Matematica intesa come "data" o "fissa". Secondo Li e Schoenfeld (2019), tale quadro necessita di una riformulazione dell'insegnamento e dell'apprendimento della Matematica nell'educazione STEM e nell'educazione co-disciplinare in generale. Il TRU Framework comprende le seguenti cinque dimensioni: contenuto; domanda cognitiva; accesso equo ai contenuti; organizzazione, proprietà e identità; valutazione formativa (Mariotti & Baccaglini Frank, 2022). Li & Schoenfeld (2019) dichiarano "l'importanza per gli studenti di sperimentare la Matematica attraverso la creazione, la progettazione, lo sviluppo e il collegamento di idee matematiche" (Li & Schoenfeld, 2019, p. 6). Un ulteriore quadro di riferimento, utile a rendere più attuabile la generalità del TRU Framework e ad eseguire analisi più dettagliate in questo contesto, è la Teoria della Mediazione Semiotica (TMS) (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). La TMS affonda le sue radici nel socio-costruttivismo vygotskiano, secondo il quale gli studenti sono guidati dal loro insegnante a costruire conoscenza matematica risolvendo compiti progettati in riferimento all'uso di artefatti opportunamente scelti. L'uso degli artefatti e il dispiegamento del loro potenziale semiotico conduce gli studenti a produrre conoscenza personale, che attraverso discussioni matematiche, orchestrate dall'insegnante, si trasforma gradualmente in conoscenza condivisa. La nozione di potenziale semiotico esprime la relazione tra i significati personali emergenti dall'esperienza di agire con l'artefatto e i significati matematici riconoscibili dall'esperto in tali azioni; la sua stretta dipendenza dal compito, che deve essere svolto dagli studenti, rende l'artefatto strumento chiave per progettare compiti appropriati. In tal modo, l'artefatto rende operativo un collegamento tra la dimensione del contenuto matematico e la dimensione della domanda cognitiva del TRU Framework. Mentre il TRU framework è stato utilizzato nel progetto generale per inquadrare il percorso formativo in un'ottica co-disciplinare, la TMS è stata utilizzata sia dai docenti durante la co-progettazione dei percorsi formativi e nell'analisi del potenziale semiotico degli artefatti, e sia dai ricercatori per analizzare i risultati dell'attività sperimentale. Dalla letteratura, emergono approcci differenti in riferimento alle interazioni tra diverse discipline: la multidisciplinarità, in cui il rapporto tra le discipline consiste nella segmentazione del lavoro senza una reale interazione (Stokols et al., 2010); la transdisciplinarità, in cui l'interazione tra discipline porta alla costituzione di una nuova disciplina con una propria epistemologia (Aboelela et al., 2007); l'interdisciplinarità, in cui l'incontro tra discipline avviene attraverso l'integrazione di alcuni aspetti della ricerca (contenuti, teoria, metodi). Qualsiasi intenzione interdisciplinare richiede e implica un certo superamento dei confini disciplinari, vale a dire l'ingresso dei ricercatori in campi di studio non familiari (Choi, 2017). In particolare, per lo studio presentato in questo articolo, sembra necessario andare oltre questi tre approcci e sostenere l'approccio co-disciplinare. Secondo Blanchard-Laville (2000) la co-disciplinarità è il modo in cui più ricercatori cooperano in modo generativo su uno specifico progetto. Nel lavoro comune c'è l'obiettivo del co-thinking, in altre parole progettare uno spazio in cui diversi ricercatori non hanno la stessa idea su qualcosa, ma qualcosa permette loro di co-pensare e far emergere idee per dare soluzioni. L'interazione tra le discipline parte dalla progettazione per poi concretizzarsi nell'osservazione, nel monitoraggio e nella riflessione su specifici percorsi formativi. Questo approccio sembra appropriato poiché il dialogo in questo studio avviene tra insegnanti di diverse discipline, in modo co-disciplinare.

La metodologia di ricerca e il contesto sperimentale

In questo articolo si presentano i risultati di uno studio basato su una design based research (Swan, 2020). In particolare, le fasi operative del progetto hanno previsto l'individuazione di alcuni problemi, le cui soluzioni è il luogo in cui avviene la co-disciplinarietà tra materia professionale e Matematica attraverso un BOA.

Design sperimentale

L'obiettivo generale dello studio di ricerca è quello di dare senso alla Matematica rispetto alla materia professionale e viceversa, dare significato alla materia professionale attraverso la Matematica. L'obiettivo specifico è quello di scoprire come la proposta di percorsi educativi co-disciplinari, co-progettati e co-condotti in classe sia dall'insegnante di Matematica che dall'insegnante di materie professionali, possa far emergere il legame esistente tra formazione professionale e Matematica, con il coinvolgimento degli studenti contrastando il rischio dispersione scolastica. Di seguito viene descritta l'organizzazione dell'intervento didattico, che prevede diverse fasi progettuali propedeutiche (dalla fase 1 alla fase 4) prima di avviare la sperimentazione in aula (fase 5). Le fasi 1-4 di formazione di docenti, si sono rivelate fondamentali per la progettazione e la realizzazione dell'intervento didattico in classe.

Fase 1: Attuazione del lavoro co-disciplinare. Gli insegnanti professionali e di Matematica hanno discusso le potenzialità del lavoro sinergico tra Matematica e discipline professionali. Fase 2: Identificazione degli artefatti della disciplina professionale. Sono stati individuati diversi artefatti specifici della materia professionale, che si sono rivelati BOA perchè utili anche dal punto di vista matematico: il cartamodello (Fig. 1), il quartometro (Fig. 2), il tariffario (Fig. 3), la beuta con palline di diverso colore (fig. 4). Fase 3: Analisi delle potenzialità semiotiche di tali BOA sia dal punto di vista matematico che professionale. Gli insegnanti hanno esplorato il potenziale semiotico degli artefatti individuati. Fase 4: Strutturazione di percorsi didattici da sperimentare nelle aule. L'analisi del potenziale semiotico 'duale', quello legato ai concetti matematici evocati e quello legato alla disciplina professionale, ha consentito la strutturazione intervento didattico co-disciplinare. (Fiorentino et al., 2021). Fase 5: L'intervento didattico.

In questo studio sono state coinvolte tre classi di circa 20 studenti e sono stati condotti tre percorsi didattici co-disciplinari che hanno coinvolto Matematica e moda, Matematica e chimica, Matematica e marketing. Nei percorsi didattici si è proposto un problema iniziale legato all'utilizzo del BOA, la successiva discussione collettiva sulle prime risoluzioni, successivi problemi per rinforzare l'evoluzione dei concetti matematici, discussione finale. L'insegnante di Matematica e l'insegnante delle discipline professionali coinvolte nella sperimentazione hanno co-progettato le attività (i problemi iniziali e successivi e le domande della discussione collettiva) con i ricercatori. Hanno co-condotto l'attività sperimentale e le discussioni matematiche in classe, mentre i ricercatori l'hanno osservata e filmata. Nelle classi circa cinque-sette studenti erano a rischio dispersione scolastica, e presentavano valutazioni negative in entrambe le discipline. Inoltre, sono state registrate assenze ingiustificate a scuola in una percentuale del 70% in tre mesi. Per affrontare il nostro obiettivo di ricerca, abbiamo analizzato le trascrizioni delle Discussioni Matematiche relative alla soluzione dei problemi proposti e all'utilizzo dei BOA. Per validare i percorsi didattici è stata effettuata un'analisi qualitativa delle trascrizioni, secondo i criteri di credibilità, attendibilità, trasferibilità e confermabilità (Guba, 1981). Questo studio rientra in un progetto generale che ha coinvolto 5 istituti professionali, 15 insegnanti in servizio e circa 300 studenti del primo biennio delle scuole coinvolte.

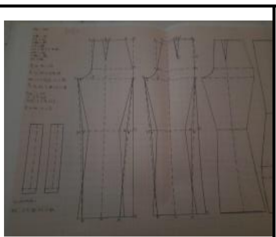
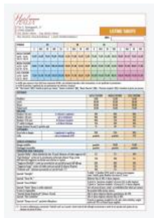
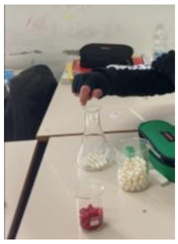
			

Fig. 1. Cartamodello	Fig. 2. Quartometro	Fig. 3. Tariffario	Fig. 4. Beuta

Gli artefatti "professionali": il caso del cartamodello e il quartometro

La sperimentazione riguardante Moda e Matematica è stata condotta in una classe seconda dell'indirizzo Industria e Artigianato per il Made in Italy presso l'I.I.S.S. "Sergio Cosmai" di Bisceglie. L'insegnante di Moda aveva già utilizzato un cartamodello (vedi Fig. 1) per la riproduzione di un pantalone, l'insegnante di Matematica aveva affrontato il concetto di proporzione e simmetria. Nella prima attività è stato chiesto agli studenti di svolgere il seguente problema: "Riprodurre su cartamodello lo schema per la realizzazione di un corpetto". Agli studenti è stato fornito l'artefatto e hanno lavorato in gruppi di 2 studenti. Al termine dell'attività è stata effettuata una discussione collettiva da entrambi i docenti, con l'obiettivo di far emergere i concetti matematici di proporzione e simmetria legati ai concetti della disciplina professionalizzante. L'artefatto utilizzato permette la modellizzazione e la realizzazione di indumenti tenendo conto delle relazioni algebriche e geometriche per realizzarli, fornendo una rappresentazione piana dell'indumento che in seguito verrà realizzato. L'identificazione di una parte di indumento da riprodurre, evoca l'idea matematica di asse di simmetria che permette di riprodurre esattamente il modello simmetrico di un quarto di indumento;

dal punto di vista della disciplina professionale, invece, evoca l'idea di piegatura del tessuto. L'individuazione di particolari posizioni in relazione tra loro sul cartamodello evoca l'idea Matematica di proporzione tra due misure; dal punto di vista della disciplina professionale, si riconoscono le lunghezze delle circonferenze relative al giro vita e al giro bacino che sono in proporzione tra loro. Infine, nel passare da una taglia all'altra, si evoca l'idea Matematica di proporzione tra misure; dal punto di vista della disciplina professionale si evidenziano le proporzioni necessarie per passare da una taglia all'altra. La seconda parte dell'attività proposta ha riguardato la riproduzione dell'indumento realizzato prima in scala 1:4, in formato originale, per riprodurlo nelle dimensioni reali. Tale passaggio viene fatto mediante l'utilizzo di un ulteriore artefatto: il "quartometro" (vedi Fig. 2). Tale artefatto è un vero e proprio righello costruito col rapporto 1:4. Il rapporto 1:4 non è casuale, ma è necessario, perchè legato alle due simmetrie assiali del corpo. Infatti, ad esempio, per realizzare un pantalone si considera l'asse di simmetria che passa per il centro del cavallo e l'asse di simmetria laterale che divide la parte anteriore dalla parte posteriore. Tale rapporto inoltre viene trasferito su tutte le misure del pantalone per creare un modello perfettamente proporzionale.

Gli artefatti "professionali": il caso del tariffario

La sperimentazione riguardante Marketing e Matematica è stata condotta in una classe seconda dell'indirizzo Servizi Culturali e dello Spettacolo presso l'I.I.S.S. "E. Majorana" di Bari. L'insegnante di Marketing aveva già affrontato il tema della sistemazione alberghiera, l'insegnante di Matematica aveva affrontato il concetto di equazioni e disequazioni. Nella prima attività è stato chiesto agli studenti di svolgere il seguente problema: "Progettare un viaggio scolastico, scegliendo il periodo più opportuno e la sistemazione migliore, in modo da individuare l'offerta più vantaggiosa". L'artefatto utilizzato è costituito da un tariffario di un hotel suddiviso in due sezioni (vedi Fig. 3): la prima sezione riguarda le tariffe suddivise per tipologia di camera, trattamento e stagione; la seconda sezione invece racchiude le diverse scontistiche applicabili per casi particolari. Agli studenti è stato fornito l'artefatto e hanno lavorato in gruppi di 4 studenti. Al termine dell'attività è stata effettuata una discussione collettiva da entrambi i docenti, con l'obiettivo di far emergere i concetti matematici di equazione e disequazione legato al concetto della disciplina professionalizzante di miglior offerta. L'artefatto ha permesso di confrontare diverse tariffe a seconda del periodo scelto e le diverse tipologie di camere disponibili. Infatti, la scelta di inserire le tariffe suddivise per colore, righe e colonne a seconda di tipologia di camera, periodo e stagione, evoca l'idea Matematica di tabella a doppia entrata; dal punto di vista del marketing la combinazione di dati per ottimizzare l'offerta. L'individuazione della miglior tariffa attraverso differenti proposte, evoca l'idea Matematica di confronto tra equazioni e disequazioni; dal punto di vista della disciplina professionale, evoca il concetto di "convenienza". Osserviamo inoltre che l'artefatto proposto, presenta anche delle percentuali di sconto a seconda di particolari situazioni, che possono evocare il significato matematico di percentuale e proporzioni.

Gli artefatti "professionali": il caso della beuta e delle palline

La sperimentazione riguardante Chimica e Matematica è stata condotta in una classe seconda dell'indirizzo odontotecnico presso l'I.I.S.S. "Sergio Cosmai" di Bisceglie. L''insegnante di Chimica aveva già affrontato il concetto di soluzioni chimiche, l'insegnante di Matematica aveva affrontato il concetto di percentuale. Nella prima attività è stato chiesto agli studenti di svolgere il seguente problema: "Simulare una soluzione da 100 ml concentrata al 50%". L'artefatto utilizzato (vedi Fig. 4) è costituito da una beuta trasparente e palline di colore diverso (rosse e bianche). Agli studenti è stato fornito l'artefatto e hanno lavorato in gruppi di 5 studenti. Al termine dell'attività è stata effettuata una discussione collettiva da entrambi i docenti, con l'obiettivo di far emergere il concetto matematico di percentuale legato al concetto chimico di concentrazione di una soluzione. Nella simulazione di una soluzione, il numero totale di palline utilizzate rappresenta la quantità di soluzione in ml e ciascuna pallina rappresenta 1 ml. Le palline rosse rappresentano il soluto, le palline bianche rappresentano il solvente. La scelta di due colori diversi delle palline evoca, dal punto di vista chimico, l'idea della differenza tra le molecole di due sostanze diverse e, dal punto di vista matematico, l'idea del rapporto tra due quantità diverse. L'inserimento delle palline in una beuta consente la loro successiva miscelazione, che evoca da un punto di vista chimico l'operazione di miscelazione di due sostanze diverse, da un punto di vista matematico l'idea di un numero razionale che rappresenta una percentuale.

Criteri di raccolta e analisi dei dati

L'analisi riguarda la discussione co-disciplinare svolta nella fase 5 successiva al lavoro di gruppo in cui sono emerse diverse soluzioni di problemi. Secondo l'ipotesi specifica di questo studio, l'analisi che segue tenta di evidenziare come il percorso formativo co-disciplinare abbia dato senso ai concetti matematici rispetto ai concetti delle discipline professionali e viceversa dà significato al concetto professionale attraverso i concetti matematici in gioco. Si riporta l'analisi di alcuni estratti della sperimentazione riguardante Matematica e Chimica. Altri esempi e analisi verranno presentate in occasione del Seminario Nazionale.

Il caso della Chimica

Matematica. Insegnante: Qualcuno vuole dirmi cosa ha fatto?

Morena: Ci è stato chiesto di preparare una soluzione da 100 ml concentrata al 50%. Avevamo le palline bianche che indicavano il solvente e le palline rosse che indicavano il soluto e una beuta. Abbiamo riempito la beuta con 50 palline rosse di soluto e 50 palline bianche di solvente.

Matematica. Insegnante: Quindi tutti voi avete creato una soluzione da 100 ml al 50%. Perché Enxy sta agitando la beuta?

Francesca: All'inizio quando mettevamo le palline nella beuta venivano concentrate per colore e poi le mescolavamo fino ad ottenere la soluzione.

Chimica. Insegnante: e come sono state create le soluzioni?

Enxy: abbiamo contato le quantità delle molecole...

Morena: Abbiamo preso 50-50 perché la concentrazione che richiedeva il problema era del 50%, cioè 1/2.

In questo estratto sembra che gli studenti diano significato al concetto matematico del 50% attraverso l'azione di mettere nella beuta metà palline di un colore e metà dell'altro. Come previsto dal punto di vista chimico la palla evoca l'idea di una molecola, come dice Enxy, e i diversi colori mettono in risalto le due sostanze, solvente e soluto. Da un punto di vista matematico, la possibilità di avere oggetti discreti come le palline permette di realizzare la percentuale e di stabilire quante palline di un colore e quante dell'altro bisogna mettere nel pallone per ottenere una soluzione di 100 ml concentrati al 50%. Il BOA sembra riunire il concetto chimico di soluzione e il senso matematico di percentuale che permettono di realizzare la soluzione richiesta e richiamano la seconda dimensione del framework TRU. La discussione prosegue e l'insegnante di Matematica propone un nuovo problema legato alla concentrazione chimica con l'obiettivo di far emergere il significato matematico di percentuale per qualsiasi grandezza di riferimento:

Matematica. Insegnante: Enxy dice che abbiamo realizzato una concentrazione al 50% di 100 ml perché ogni pallina rappresenta 1 ml. Se vi chiedessi di preparare una soluzione al 20% da 100 ml, cosa fareste?

Francesca: 20 e 20

Morena: sì, 20 palline bianche e 20 palline rosse

Francesca: ma facendo 20 palline rosse e 20 bianche otteniamo 40 palline e non 100 abbiamo il 20% di 100ml…

In questo estratto Francesca e Morena danno una soluzione sbagliata, probabilmente perché trasferiscono meccanicamente la soluzione del problema precedente a quello nuovo, evidenziando una mancanza di senso. Francesca mette in discussione la sua soluzione perché osserva il BOA e trova qualcosa che non va. Non ci ha pensato abbastanza per dare una soluzione corretta. I successivi interventi di Nicola e Ginevra aiutano Francesca a ripensare la sua soluzione.

Nicola: Qualcosa non quadra...<u>20 palline di soluto e 20 palline di solvente sono sempre concentrate al 50%. Mentre al 20% mi aspetto di trovare molte meno palline di soluto... al 20% la soluzione è meno concentrata, cioè dovrebbero esserci molte più palline bianche.</u>

Ginevra: sì, sono d'accordo con Nicola, altrimenti non ci sarebbe differenza tra concentrazione al 50% e concentrazione al 20%... ma quante palline dobbiamo mettere nel soluto e quante nel solvente?

Francesca: ah sì, ho capito! dobbiamo fare 20 su 100 e 80 su 100…

Carlotta: giusto! il soluto è 20... quindi 20 su 100, quindi per ottenere 100 ml totali, il solvente deve essere 80 palline. In altre parole, abbiamo calcolato il rapporto da 20 a 100, ovvero ⅕ di 100 palline. Quindi, 20 palline rosse per il soluto e ⅘ di 100 palline per il solvente, cioè 80 palline bianche.

Nella parte sottolineata della trascrizione, sembra che la dichiarazione di Nicola riveli che il BOA stia giocando un ruolo fondamentale perché mette in evidenza l'errore. Nicola traccia una relazione tra le palline, il numero delle palline, come molecole, e la percentuale. Nelle parole seguenti traccia una relazione tra la percentuale (20%) e ciò che si aspettava di trovare. Il numero di palline non corrisponde al rapporto 20/100. Ginevra, d'accordo con Nicola, va oltre. Infatti è passata da quanto risulta dal BOA al livello matematico, confrontando le percentuali 20% e 50%. La discussione basata sull'utilizzo dell'artefatto legato a significati matematici e chimici, sembra portare Francesca a ricostruire la sua soluzione. In effetti, la sua affermazione "dobbiamo fare 20 su 100 e 80 su 100" mostra l'evoluzione della sua precedente idea. Carlotta offre una sintesi che conferma quanto detto da Francesca. Il quadro TRU con la dimensione del contenuto equo, unitamente all'utilizzo dell'artefatto, consente a Ginevra, Francesca e Carlotta (queste studentesse sono state dichiarate a rischio dispersione scolastica dal Consiglio di Classe) di intervenire e dare senso a quello che stanno dicendo.

Infine, durante tutta l'attività si è potuta osservare la presenza e gli interventi degli studenti più a rischio dispersione scolastica. Inoltre, tutti loro hanno partecipato alle attività, intervenendo attivamente alle discussioni. Questi studenti spesso si assentano a scuola e, anche quando sono presenti, non partecipano alle attività di classe. Questo fenomeno ci porta a pensare che, coinvolgendo gli studenti in attività co-disciplinari volte a dare un senso ai concetti teorici delle discipline, si possa contribuire a ridurre la dispersione scolastica.

Risultati preliminari e considerazioni conclusive

Gli studenti sembrano dimostrare di riscoprire il senso della percentuale proprio quando incontrano la difficoltà di stabilire il numero corretto di palline per raggiungere una concentrazione del 20%, nel caso di Matematica e Chimica. Appare inoltre evidente, nelle proposte di sintesi degli studenti, il riferimento ai concetti matematici per interpretare il concetto professionale in sé e al concetto professionale per spiegare i concetti matematici. Questi collegamenti emergono grazie all'utilizzo dei BOA e consentono il raggiungimento degli obiettivi fissati dagli insegnanti anche da parte degli studenti a rischio dispersione scolastica. Come previsto, la sperimentazione del percorso educativo co-progettato e co-condotto, potrebbe essere considerata una buona pratica per ridurre la dispersione scolastica.

Riferimenti Bibliografici

Aboelela, S. W., Larson, E., Bakken, S., Carrasquillo, O., Formicola, A., Glied, S. A., Haas, J., & Gebbie, K. M. (2007). Defining interdisciplinary research: Conclusions from a critical review of the literature. *Health services research*, 42(1p1), 329-346. https://doi.org/10.1111/j.1475-6773.2006.00621.x

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2022). "Doing well" in the Teaching for Robust Understanding approach revealed by the lens of the semiotic potential of tasks with the GGBot. In *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Bartolini Bussi, M.G. (1998). Verbal interaction in mathematics classroom: a Vygotskian analysis, in H. Steinbring, M.G. Bartolini Bussi & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in mathematics classroom*, NCTM, Reston, Virginia, 65-84. https://doi.org/10.1017/CBO9780511720406.002

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Prospective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum 746-783. https://doi.org/10.4324/9780203930236

Blanchard-Laville C. (2000), "De la co-disciplinarité en sciences de l'éducation", *Revue Française de pédagogie*, 132, 1, 55-66. https://doi.org/10.3406/rfp.2000.1033

Choi, S & Richards, K (2017). *Interdisciplinary Discourse*, Palgrave Macmillan https://doi.org/10.1057/978-1-137-47040-9

Fiorentino M. G., Montone A., Ricciardiello G., Pertichino M. (2021). La Matematica negli istituti professionali: una ricerca per ridurre la dispersione scolastica in *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 44B N.4, 339-363, ISSN: 1123-7570

Guba, E. (1981). Criteria for Assessing the Trustworthiness of Naturalistic Inquiries. *Educational Technology Research and Development* 29 (2), 75-91. https://doi.org/10.1007/BF02766777

Li, Y., & Schoenfeld, A. H. (2019). Problematizing teaching and learning mathematics as "given" in STEM education. *Int J Stem Education* 6(44), 1–13. https://doi.org/10.1186/s40594-019-0197-9

M.I.M. (2019). Linee guida per favorire e sostenere l'adozione del nuovo assetto didattico e organizzativo dei percorsi di istruzione professionale.

Pehkonen, E. (1997). Introduction to the concept "open-ended problem." In *Use of open-ended problems in mathematics classroom* (Issue 7). http://coreylee.me/en/publications/2001_self-efficacy_change.pdf%5Cnhttp://files.eric.ed.gov/fulltext/ED419714.pdf

Schoenfeld, A. H. (2018). Video analyses for research and professional development: the teaching for robust understanding (TRU) framework. *ZDM*, 50(3), 491-506. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0908-y

Star, S. L. (1995). The politics of formal representations: Wizards, gurus, and organizational complexity. In S. L. Star (Ed.), *Ecologies of knowledge: Work and politics in science and technology* 88–118.

Stokols, D., Hall, K. L., Moser, R. P., Feng, A., Misra, S., & Taylor, B. K. (2010). Cross-disciplinary team science initiatives: Research, training and translation. In R. Frodeman, J. T. Klein & C. Mitcham (Eds.), *The Oxford handbook of interdisciplinarity* 471–493.

Swan M. (2020). Design Research in Mathematics Education. In: Lerman S. (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Cham: Springer, 148-152. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_180

Wagner, J. (1997). The unavoidable intervention of educational research: A framework for reconsidering research-practitioner cooperation. *Educational Researcher*, 26(7), 13–22. https://doi.org/10.3102/0013189X026007013

Wake, G. (2014). Making sense of and with mathematics: The interface between academic mathematics and mathematics in practice. *Educational Studies in Mathematics*, 86(2), 271-290. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9540-8

Fattori che influenzano la difficoltà percepita di studenti e insegnanti nella risoluzione di task matematici

Camilla Spagnolo
Libera Università di Bolzano

1. Introduzione al problema di ricerca

Il tema delle difficoltà in matematica è certamente un tema di grande interesse per chi si occupa di studiare i processi di apprendimento e insegnamento della matematica. Nonostante diverse ricerche in didattica della matematica si occupino implicitamente del tema, questo argomento è ancora uno dei temi più aperti e studiati in educazione matematica. Come messo in luce da Zan (2007), le difficoltà si possono classificare in diverse categorie, a seconda dell'oggetto su cui ci si focalizza: difficoltà della matematica come disciplina o difficoltà degli studenti in termini di deficit o in termini strettamente legati al rapporto con la matematica.

Nella mia ricerca mi sono focalizzata sulle difficoltà dei task matematici, in particolare sulla *difficoltà percepita* (DP) da studenti e insegnanti dopo aver risolto un task matematico.

La difficoltà di un task matematico sembra dipendere da un insieme di fattori, tra i quali il contenuto matematico (Thevenot & Oakhill, 2005; Radmehr & Drake, 2017), la formulazione del problema (Bolondi et al., 2018), la comprensione del testo (Spagnolo et al., 2021), le abilità o le competenze degli studenti (Vicente et al., 2007) e i fattori affettivi (Zan, et al., 2006). In particolare, i principali fattori evidenziati dalla letteratura riguardano: i) le abilità o le competenze degli studenti; ii) la difficoltà del task in termini di conoscenze e/o abilità e/o competenze necessarie per risolverlo; iii) fattori affettivi.

D'altra parte, la DP e le sue cause non sono state affrontate allo stesso modo. Nell'ambito della ricerca in didattica della matematica, non esiste una definizione condivisa di DP e poche indagini hanno esplorato i fattori legati a questo argomento (Eccles & Wigfield, 2020; Doz et al., 2023). È necessario quindi anzitutto chiarire che cosa si intende per DP; all'interno della ricerca consideriamo la DP in relazione al processo di risoluzione di un task matematico. Nel processo di risoluzione di un task, uno studente può imbattersi in molteplici difficoltà che possono dipendere sia dalle peculiarità dello studente stesso (come le sue abilità e conoscenze, le sue convinzioni e i suoi atteggiamenti), sia dalle peculiarità del task (come il testo o il contenuto matematico coinvolto). Queste caratteristiche del task matematico sono le stesse che possono influenzare la sua idea del compito e, di conseguenza, la sua DP. Pertanto, pur essendo strettamente connesse, difficoltà e DP sono due aspetti diversi (Spagnolo & Saccoletto, 2023a). Riteniamo che una delle principali differenze sia che la DP può influenzare il comportamento degli studenti nell'approccio a un task di matematica.

Inoltre, DP da uno studente non coincide necessariamente con la difficoltà "oggettiva" del task né, come mostrato in Arzarello e Ferretti (2021), con la DP dall'insegnante. La non corrispondenza tra la percezione di difficoltà da parte dei docenti di alcuni task matematici e le effettive percentuali di successo di questi task, apre la strada a riflessioni correlate alla ricerca sulle convinzioni degli insegnanti relative a ciò che pensano gli studenti (Philipp, 2007), poiché si ritiene che insegnamento e apprendimento efficaci si sviluppino a partire dalle somiglianze tra convinzioni di insegnanti e studenti (Kumaravadivelu, 1991). Il nostro obiettivo è quello di mettere in luce come studenti e insegnanti percepiscono un task, ovvero se è facile o difficile, e cosa li porta a fare questa valutazione, mettendo in evidenza eventuali mismatch tra DP dell'insegnante, DP dello studente, ed eventualmente difficoltà misurata dalla large scale assessment.

Lo scopo di questa relazione è quello di esplicitare i fattori che contribuiscono alla costruzione della DP di studenti e insegnanti dopo aver risolto un task. La ricerca è iniziata nel 2021 durante il periodo di pandemia, con uno studio presentato a ICME14 (pubblicato su richiesta di estensione in Saccoletto & Spagnolo, 2022). Si vuole mettere in evidenza il processo che ha portato all'esplicitazione dei fattori e alla delineazione di *categorie* di analisi della DP e alla descrizione di queste categorie. Le prime fasi di questo studio sono state e verranno presentate alle conferenze internazionali ICME14, CERME13, MAVI29, CIEAEM74 e ICME15. Ognuno dei cinque studi ha permesso di aggiungere elementi chiave della determinazione delle categorie.

2. Riferimenti teorici

Nell'ambito della ricerca in didattica della matematica non esiste una definizione condivisa di DP di un task. Tuttavia, è comunemente accettato che essa sia diversa dalla difficoltà di un task (Thevenot & Oakhill, 2005), in quanto quest'ultima dipende solitamente da una valutazione a posteriori, basata sui risultati ottenuti dagli studenti. Nel campo della psicologia cognitiva, invece, gli studi sulla difficoltà soggettiva e sulla sua percezione sono stati condotti a partire dagli anni '90, sviluppando diverse definizioni ed espressioni per caratterizzare il concetto (si vedano, per esempio, Eccles & Wigfield, 2020; Doz et al., 2023). La difficoltà del task secondo Thevenot & Oakhill (2005) è strettamente legata al carico cognitivo delle operazioni coinvolte nelle strategie risolutive del task (se stabilita a priori), oppure calcolata empiricamente a seconda delle risposte ottenute (se stabilita a posteriori).

Talvolta, la DP è stata considerata un altro tipo di manifestazione dell'autoefficacia, piuttosto che un aspetto complementare ad essa, ma questa unificazione sembra problematica (Eccles & Wigfield, 2020). Uno dei concetti che possono essere considerati vicini alla DP come la intendiamo noi, è il "sentimento di difficoltà" (feeling of difficulty, FOD), progressivamente definito da Efklides e colleghi in diversi studi tra gli ultimi anni del XX secolo e il 2011.

In primo luogo, è stata semplicemente descritta come una delle "stime più vicine ai sentimenti di difficoltà" (Efklides et al., 1998), perché gli autori erano convinti dell'impossibilità di misurare direttamente i sentimenti, ma ritenevano invece possibile far stimare alle persone la difficoltà di un task. In seguito, sono state analizzate le diverse cause del FOD (Efklides et al., 1999) ed è stato definito come una "esperienza metacognitiva che monitora l'elaborazione cognitiva mentre si svolge" (Efklides & Touroutoglou, 2010, p. 272). È fondamentale sottolineare che il FOD è legato alla DP, ma non sono la stessa cosa. Infatti, sono concettualmente diversi, in quanto il FOD ha una "natura esperienziale", mentre la DP è più un giudizio metacognitivo creato sulla base di un richiamo consapevole della conoscenza di sé e del compito. Naturalmente, le persone possono ricordare le loro conoscenze metacognitive sul compito e su se stesse e usarle per dare un senso alla sensazione che stanno provando (Efklides & Touroutoglou, 2010).

Sebbene FOD e DP siano concettualmente diversi, le due espressioni vengono occasionalmente utilizzate come sinonimi (Nuutila et al., 2021). Tenendo conto delle differenze, in questo lavoro ci siamo riferiti alla DP aggiungendo alcune delle caratteristiche del FOD e adattandole al nostro contesto, ovvero la ricerca nell'ambito della didattica della matematica. Vale la pena citare, come punto di partenza, la sintesi di Doz e colleghi (2023) secondo cui la natura della sensazione di difficoltà del compito è metacognitiva perché deriva dall'attività di monitoraggio dell'elaborazione di un compito in via di sviluppo e la consapevolezza di questo processo ha un impatto sull'autoregolazione, sullo sforzo, sugli affetti e sull'uso di strategie.

Per definire correttamente le categorie e le sottocategorie sopra citate, faremo riferimento ad alcune teorie e costrutti utilizzati nella ricerca in didattica della matematica. Innanzitutto, per gli studenti considereremo il modello multidimensionale dell'atteggiamento (Di Martino & Zan, 2010), che tiene conto della competenza percepita, degli aspetti emotivi e della visione della matematica. Inoltre, si prenderà in considerazione anche l'aspetto della metacognizione, legato al processo decisionale degli studenti nell'affrontare un task, un processo su cui influiscono credenze e valori personali (Radmehr & Drake, 2017).

Per quanto riguarda gli insegnanti, ci riferiamo al "three-fold meta-didactical conflict" (Arzarello & Ferretti, 2021; Arzarello et al., 2023). Partendo dal presupposto che talvolta insegnanti e studenti sembrano utilizzare linguaggi incommensurabili (Sfard, 2008), il "three-fold meta-didactical conflict" mette in luce le differenza tra la percezione degli insegnanti e le valutazioni standardizzate. Come suggerisce il nome, questo conflitto ha tre componenti ed è metadidattico poiché riguarda i discorsi sui processi didattici come la valutazione, le competenze e gli errori degli studenti, ecc. e non i concetti matematici pensati in sé. Questo conflitto è costituito da tre componenti profondamente intrecciate, in ognuna delle quali emerge una contraddizione tra le convinzioni degli insegnanti e i dati degli studenti: la percezione da parte degli insegnanti della difficoltà di un compito; la consapevolezza da parte degli insegnanti delle cause degli errori degli studenti; la percezione da parte degli insegnanti dello scopo dei compiti. Abbiamo fatto riferimento anche al concetto "blind spot" di Nathan & Koedinger (2000), espressione utilizzata per identificare la mancanza di consapevolezza da parte degli insegnanti della comprensione e delle difficoltà degli studenti, associata a una conoscenza dei contenuti.

3. Aspetti metodologici

In questa sezione verranno descritte le diverse fasi che hanno permesso di elaborare, definire e validare le *categorie* per la descrizione dei diversi fattori che contribuiscono alla DP.

In particolare, tali categorie sono state esplicitate nella prima fase della ricerca presentata a ICME14 (Saccoletto & Spagnolo, 2022) e ampliate in Spagnolo & Saccoletto (2023b). Tali categorie sono state utilizzate per classificare i fattori che influenzano la DP degli studenti e sono state determinate utilizzando la *Constructive Grounded Theory*(CGT), utilizzando un metodo induttivo e basandosi direttamente sui dati raccolti (Glaser & Strauss, 1967).

3.1 Prima fase: correlazione tra DP e capacità degli studenti di rispondere correttamente al task

In questa prima fase qualitativa sono stati coinvolti 79 studenti di un Liceo Scienze Umane: due classi di grado 9 e due classi di grado 10.

Gli studenti hanno compilato un questionario online, a cui sono seguite interviste in profondità. Il questionario è stato somministrato tramite Google forms (utilizzando i computer della classe) e un ricercatore era presente durante la somministrazione. Il questionario conteneva due task argomentativi algebrici relativi al calcolo letterale (Figura 1). In particolare il Task 1 è a scelta multipla e richiede il riconoscimento di un'argomentazione corretta, mentre il Task 2 è a risposta aperta e richiede di produrre un'argomentazione; entrambi i compiti sono stati selezionati da precedenti test INVALSI, in quanto statisticamente validati (Lazarsfeld, 1958).

Task 1

n è un numero naturale.

Antonio afferma che "$4n-1$ è sempre un multiplo di 3".
Antonio ha ragione?
Nella tabella che segue indica la sola argomentazione che giustifica la risposta corretta.

Antonio ha ragione...	Antonio non ha ragione...
A. ☐ perché $4n-1=3n$	C. ☐ perché $4n-1$ è sempre dispari
B. ☐ perché se $n=4$ allora $4n-1=15$	D. ☐ perché se $n=3$ allora $4n-1=11$

Task 2

Marco afferma che, per ogni numero naturale n maggiore di 0, n^2+n+1 umero primo.
Marco ha ragione?

Scegli una delle due risposte e completa la frase.

☐ Marco ha ragione, perché ……………………………………………

……………………………………………………………

☐ Marco non ha ragione, perché ……………………………………………

……………………………………………………………

Figura 1. Task 1: Quesito D25-B, Prova INVALSI di matematica Grado 8, 2017;

Task 2: Quesito D6, Prova INVALSI di matematica Grado 10, 2014 (www.gestinv.it)

Dopo la risoluzione di ciascun task, seguiva la richiesta di valutare la sua difficoltà (spiegando le ragioni di tale valutazione) e alcune altre domande relative alla DP del task specifico. Infine, l'ultima sezione del questionario era una sezione più generale con domande volte a chiarire i fattori sottostanti che potevano influenzare la DP.

Le interviste sono state condotte a distanza attraverso Google Classroom (applet Meet) con l'idea di aiutare a categorizzare alcune delle risposte date dagli studenti.

Tra i lavori che affrontano la necessità di sviluppare quadri teorici sull'affect, ci riferiamo in particolare allo studio di Di Martino e Zan (2010) sull'atteggiamento, in quanto abbiamo riconosciuto alcune analogie con il loro studio nella lettura e nell'analisi delle risposte dei nostri studenti. Nel loro lavoro, Di Martino e Zan hanno letto e analizzato 1.600 elaborati in cui studenti italiani raccontavano la loro esperienza con la matematica. Dal loro studio è emerso un modello tridimensionale di atteggiamento nei confronti della matematica. Il modello prevede tre dimensioni strettamente interconnesse: Dimensione emotiva, Visione della matematica, Competenza percepita.

Questo modello è stato utile per interpretare meglio i nostri risultati, come emergerà dalla discussione dei risultati.

Inoltre, dalle risposte e dalle considerazioni degli studenti emerge l'influenza degli aspetti metacognitivi. La metacognizione è strumentale alla costruzione di una rappresentazione appropriata di un dato problema e al monitoraggio dei processi di soluzione per risolverlo (Garofalo & Lester, 1985; Schoenfeld, 2016). La metacognizione è anche legata alle decisioni che un problem solver prende tra diverse strategie cognitive, decisioni che si riferiscono alle sue convinzioni e ai suoi valori personali (Radmehr & Drake, 2017). Le convinzioni e i valori sull'apprendimento e sulla risoluzione dei problemi sono importanti per la codifica e il recupero della conoscenza dei contenuti (Radmehr & Drake, 2017).

In particolare, l'esperienza metacognitiva è "ciò di cui la persona è consapevole e ciò che prova quando si imbatte in un compito ed elabora le informazioni ad esso correlate" (Efklides, 2008, pp. 279). Le esperienze metacognitive comprendono anche il giudizio sull'apprendimento, la stima dello sforzo e del tempo necessario e speso per il compito, nonché la stima della correttezza della soluzione. Le esperienze metacognitive hanno un effetto sulle decisioni che gli studenti prendono in situazioni di apprendimento riguardo allo sforzo, all'investimento di tempo o all'uso di strategie (Efklides, 2006).

3.2 Seconda fase: esplicitazione delle categorie

La seconda fase della sperimentazione è stata condotta un anno dopo (Saccoletto & Spagnolo, 2022) e ha coinvolto 69 studenti di Istituto Tecnico: tre classi di grado 9. Gli studenti hanno compilato lo stesso questionario online (descritto in 3.1), seguito da interviste in profondità condotte di persona con lo scopo di facilitare la categorizzazione di alcune delle risposte date dagli studenti.

In questa fase i protocolli degli studenti sono stati categorizzati utilizzando la CGT (Charmaz, 1994), in particolare considerando le risposte degli studenti alle domande aperte del questionario. La teoria condivide alcune caratteristiche con i metodi quantitativi (Creswell, 2005; Greckhamer & Koro-Ljungberg, 2005) ma si colloca nella tradizione qualitativa. Le procedure di analisi della Grounded Theory sono state ben documentate nella letteratura metodologica (Charmaz, 1990; Creswell, 1998, 2005; Harry, Sturges, & Klinger, 2005) ed evidenziano la validità (e, secondo alcuni, le basi oggettive) di questo metodo di ricerca. Per una trattazione esaustiva sull'evoluzione e gli sviluppi della teoria, si vedano Bruce (2007) e Mills, Bonner e Francis (2006).

In questa fase dello studio, il metodo utilizzato è induttivo: le categorie di analisi sono state costruite partendo dal caso specifico e focalizzandosi sul particolare piuttosto che sul generale. Abbiamo basato le nostre conclusioni sul database dei protocolli (le risposte degli studenti consistevano in ricchi dati descrittivi).

Le categorie emerse dall'analisi sono state confrontate con le categorie del quadro teorico di Di Martino, Zan (2010), evidenziando le differenze relative al costrutto di DP.

3.3 Terza fase: generalizzazione delle categorie

La terza fase dello studio (Spagnolo & Saccoletto, 2023b) ha coinvolto 148 studenti di scuole di diverso tipo. Nello specifico, la ricerca raccoglie tutti i protocolli dei primi due studi e li analizza, evidenziando le differenze emerse nelle categorie di analisi. Per analizzare e mettere in evidenza tali differenze, sono stati condotti focus group con i medesimi studenti.

Anche in questa fase l'approccio utilizzato per analizzare i dati è di tipo induttivo (Charmaz, 1994): si è partiti dalle risposte degli studenti, lavorando per una comprensione più ampia dei modelli e delle tendenze generali. Esistono regolarità significative nelle procedure di raccolta e analisi dei dati che sono state utili per costruire categorie di analisi.

3.4 Quarta fase: DP dagli insegnanti

Nella quarta fase dello studio (Nicchiotti & Spagnolo, accettato per la pubblicazione il 20/12/2023) sono stati coinvolti gli insegnanti, nello specifico 7 docenti di matematica delle scuole superiori. Le caratteristiche individuali degli insegnanti osservati erano varie, in particolare per quanto riguarda il tipo di scuola e di curriculum in cui insegnano, gli anni di esperienza e il background. Anche in questo caso, gli insegnanti hanno compilato il questionario online (rispetto agli stessi task valutati dagli studenti), seguito da interviste in profondità condotte tramite Google meet. L'analisi qualitativa dei dati è partita dai fattori che caratterizzano la DP degli studenti, che sono stati confrontati con quelli espressi dagli insegnanti.

3.5 Quinta fase: confronto tra i fattori che influenzano la DP di studenti e insegnanti

Infine, nella quina fase dello studio (Nicchiotti & Spagnolo, accettato per la pubblicazione il 21/12/2023) sono stati coinvolti sia studenti che insegnanti, in particolare 86 studenti (di grado 10) e

7 insegnanti di matematica della scuola secondaria di secondo grado. Gli studenti appartenevano a cinque classi di tre scuole diverse (tre classi con curriculum scientifico, una classe con curriculum umanistico e una classe con curriculum sportivo), mentre gli insegnanti erano i docenti di matematica di ciascuna classe, più due docenti esterni. Abbiamo somministrato un questionario (con le medesime domande delle precedenti fasi, ma differenti task) tramite Google Forms a studenti e insegnanti per analizzare la loro DP rispetto a due task (Figura 2) e per discutere più in generale le loro opinioni sulla difficoltà di un task matematico.

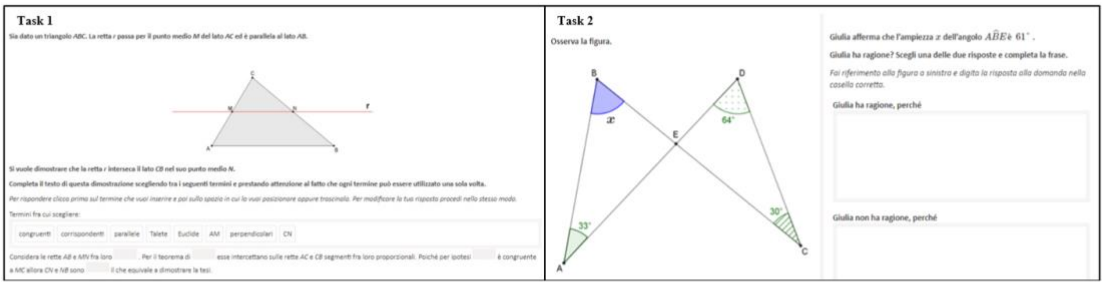


Figura 2. Entrambi i Task 1 e 2 sono stati somministrati agli studenti italiani di Grado 10 nel 2018, Prova INVALSI di matematica (www.gestinv.it)

Il questionario era simile per studenti e insegnanti: l'unica differenza era che alcune domande si riferivano rispettivamente all'esperienza di studenti e insegnanti, quindi erano speculari nelle due versioni. I task presenti in questo questionario sono entrambi argomentativi e riguardano la geometria piana, ma sono diversi per contenuto matematico e tipologia (rispettivamente un cloze e una domanda a risposta aperta); essi sono stati selezionati dalle passate prove INVALSI di grado 10.

4. Analisi e discussione dei risultati

Tutte le analisi sono state effettuate con Excel per il calcolo dei valori medi e per la rappresentazione grafica dei dati, mentre l'analisi qualitativa della valutazione delle motivazioni da parte di studenti e insegnanti è stata sviluppata con NVIVO12.

4.1 Prima fase: correlazione tra DP e capacità degli studenti di rispondere correttamente al task

Uno studio preliminare (Spagnolo & Saccoletto, 2023a) ha messo in evidenza che la DP da uno studente non sembra essere legata alla capacità di rispondere correttamente alla domanda, ma sembra includere più fattori metacognitivi e di autopercezione. Dall'analisi qualitativa del questionario emerge che, quando uno studente esprime la propria DP in relazione a un singolo task o nel confronto di più task, non c'è corrispondenza tra il livello di DP scelto durante la valutazione dei singoli task (in risposta a "Su una scala da 1 a 10, quanto hai trovato difficile il Task1/Task2?") e quello scelto durante il confronto tra i due task (in risposta a "Confronta i due task. Quale dei due hai trovato più difficile?"). Le interviste agli studenti suggeriscono che questa scelta dipende da fattori legati ad atteggiamenti e convinzioni. A nostro avviso, questo potrebbe essere una prova della difficoltà degli studenti nel valutare un task, oppure potrebbe indicare che gli studenti considerano fattori diversi durante la valutazione dei singoli task o il confronto.

4.2 Seconda fase: esplicitazione delle categorie

L'obiettivo di questa fase era duplice. Da un lato eravamo interessati a verificare se il mismatch presente in 4.1 si fosse ripetuto, dall'altro volevamo indagare ulteriormente le motivazioni che spingono gli studenti a scegliere un livello di difficoltà piuttosto che un altro.

Una prima analisi ha messo in luce molte categorie, relative agli aspetti principali citati dagli studenti nelle loro risposte. Abbiamo quindi considerato queste categorie e riletto le risposte per unificare, confrontare e cercare di esplicitare gli aspetti principali a cui queste categorie si riferivano. Da questa seconda fase di analisi sono emerse quattro macro categorie: *Strategie di risoluzione*, *Capacità ed esperienze*, *Emozioni* e *Formulazione del task*.

In *Strategie di risoluzione* abbiamo raggruppato le risposte in cui gli studenti fanno esplicito riferimento al tipo di strategia o processo che, secondo loro, era necessario per risolvere il task. L'attenzione è quindi rivolta a ciò che gli studenti fanno per raggiungere la soluzione.

La seconda categoria, *Capacità ed esperienze*, è la più diffusa e riguarda le risposte che si riferiscono alle capacità o alle competenze percepite dagli studenti e alle esperienze precedenti che influenzano la loro DP del compito. In questa categoria rientrano gli studenti che fanno esplicito riferimento al fatto che non hanno familiarità con questo tipo di compito. Ciò rafforza l'idea che un problema è più facile se è simile a qualcosa di già noto. Inoltre, questa categoria contiene le risposte che si riferiscono a ciò che gli studenti (non) sono in grado di fare o a ciò che (non) sanno. L'attenzione di queste risposte è sulla percezione di sé degli studenti (in generale, o in riferimento ai task).

La categoria *Emozioni* si riferisce al fatto che gli studenti considerano esplicitamente le loro emozioni nel motivare il livello di difficoltà scelto.

La quarta categoria rappresenta le considerazioni sulla *Formulazione del task*, in particolare rispetto al testo. Infine, notiamo che queste categorie non sono da intendersi come esclusive, e alcune risposte possono essere classificate facendo riferimento a più di una categoria.

4.3 Terza fase: generalizzazione delle categorie

In questa fase l'analisi ha messo in evidenza differenze e alcune risposte ci hanno portato a creare una nuova categoria: *Considerazioni personali*. Questa categoria è intesa come una riflessione personale dello studente rispetto al proprio successo in matematica.

Le categorie emerse dall'analisi ci permettono di chiarire i principali aspetti coinvolti quando uno studente esprime la propria DP in relazione a task matematici e in generale.

Ci sono ovviamente differenze metodologiche tra la nostra indagine e il ricco lavoro di Di Martino e Zan (2010). Per esempio, abbiamo scelto di porre domande specifiche e le risposte degli studenti sono state certamente più brevi. Nonostante le differenze, riteniamo che le categorie individuate nel nostro studio possano essere collegate al costrutto di atteggiamento, così come definito da questi ultimi. Inoltre, le risposte al questionario possono essere collegate alla visione della matematica: alcuni studenti descrivono esplicitamente i metodi che ritengono necessari per risolvere i compiti. La categoria *Considerazioni personali* contiene risposte che esprimono ciò che gli studenti ritengono necessario per avere successo in matematica. Infine, anche nel nostro caso, gli studenti possono fare riferimento in modo più o meno esplicito alle loro competenze percepite nella risoluzione del compito scelto ed esplicitare alcune idee sulle loro conoscenze e abilità percepite.

Nell'assegnare un livello di DP a un task, gli studenti sembrano essere influenzati da fattori più strettamente legati al compito (come gli elementi del testo), da fattori legati al loro atteggiamento o alle loro emozioni e da aspetti metacognitivi (come la mancanza di capacità di valutare le proprie competenze, conoscenze e abilità). Nell'esplicitare in senso generale gli aspetti legati alla DP, gli studenti sembrano fare riferimento molto più spesso al testo, alla preparazione personale, ai contenuti specifici o agli aspetti legati alla produzione di spiegazioni o argomentazioni a sostegno dei loro risultati. Mancano completamente gli aspetti legati alle emozioni, mentre sono molto più presenti le riflessioni personali su come migliorare le proprie prestazioni.

4.4 Quarta fase: DP dagli insegnanti

Nonostante un campione molto piccolo, questo studio qualitativo fornisce una prima visione dei fattori che influenzano la DP dagli insegnanti, confrontandoli con quelli che influenzano la DP dagli studenti.

Dimostra che le categorie definite in (Saccoletto & Spagnolo, 2022, 2023b) sono utili anche per l'analisi delle percezioni degli insegnanti e che i fattori che influenzano la DP dagli insegnanti e dagli studenti sono gli stessi, ma variano in proporzione. In generale, gli insegnanti sembrano essere consapevoli delle ragioni alla base della DP, ma talvolta la sottovalutano e, soprattutto, sembrano non prendere in considerazione l'aspetto emotivo legato alla difficoltà.

4.5 Quinta fase: confronto tra i fattori che influenzano la DP di studenti e insegnanti

Questa fase offre una prima visione del confronto tra i fattori che influenzano la DP dagli studenti e dagli insegnanti. In primo luogo, utilizzando le categorie precedentemente definite, ne abbiamo testato la solidità e abbiamo confermato che sono utili anche per analizzare le risposte degli insegnanti. L'analisi delle risposte relative ai Task 1 e 2 (Figura 2) conferma che i fattori che influenzano la DP dagli insegnanti e dagli studenti sono gli stessi, ma anche in questo caso variano in proporzione tra i due gruppi. In generale, gli insegnanti sembra che si concentrino maggiormente su fattori oggettivi, come la forma e il contenuto del compito, nel valutarne la difficoltà. Al contrario, gli studenti considerano anche elementi soggettivi, come l'esperienza o la percezione di sé. Questi risultati possono essere interpretati alla luce del three-fold meta-didactical conflict, perché studenti e insegnanti non sembrano considerare gli elementi allo stesso modo.

5. Conclusioni e prospettive future

Le categorie che definite a partire dai fattori che influenzano la DP di studenti nella risoluzione di task matematici sono essenziali per dare una definizione di difficoltà percepita, ma riteniamo che possano non essere gli unici aspetti che la caratterizzano. Ulteriori studi ci aiuteranno a esplicitare una definizione di DP. La ricerca può essere sviluppata in diverse direzioni: riteniamo, ad esempio, che sia importante indagare la DP anche prima di risolvere un task e metterla in relazione con la DP dopo averlo risolto. A partire da questi primi risultati, si vorrebbe costruire un questionario adattivo per ordinare i task (più di 2) in ordine di difficoltà. Infine, stiamo preparando un ulteriore studio per esaminare il fenomeno da una prospettiva quantitativa.

Bibliografia essenziale

Arzarello, F., & Ferretti, F. (2021). Links between the INVALSI Mathematics test and teaching practices: an exploratory study. In P. Falzetti (Ed.), *I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca* (pp. 96–109). Franco Angeli.

Arzarello, F., Ferretti, F., & Vannini, I. (2023). La formazione degli insegnanti di matematica e le valutazioni standardizzate: primi risultati di un progetto di ricerca nazionale interdisciplinare. *Annali online della Didattica e della Formazione Docente*, 15(25), 88-103.

Bolondi, G., Branchetti, L., & Giberti, C. (2018). A quantitative methodology for analyzing the impact of the formulation of a mathematical item on students learning assessment. *Studies in Educational Evaluation*, 58, 37-50. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2018.05.002

Bruce, C. (2007). Questions arising about emergence, data collection, and its interaction with analysis in a grounded theory study. *International Journal of Qualitative Methods*, 6(1), pp. 51-68.

Charmaz, K. (1990) Discovering chronic illness: Using grounded theory. Social Science & Medicine, 30, pp. 1161-1172.

Charmaz, K. (1994). Identity dilemmas of chronically ill men. *Sociology Quarterly*, 35, 269–288. https://doi.org/10.1111/j.1533-8525.1994.tb00410.x

Creswell, J. (1998). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five traditions*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Creswell, J. (2005). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating qualitative research*. Upper Saddle River, NJ: Merrill Prentice Hall Pearson Education.

Di Martino, P., & Zan, R. (2010). 'Me and maths': Towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(1), 27–48. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9134-z

Doz, E., Cuder, A., Pellizzoni, S., Carretti, B., & Passolunghi, M. C. (2023). Arithmetic Word Problem-Solving and Math Anxiety: The Role of Perceived Difficulty and Gender. *Journal of Cognition and Development*, 1–19. https://doi.org/10.1080/15248372.2023.2186692

Eccles, J. S., & Wigfield, A. (2020). From expectancy-value theory to situated expectancy-value theory: A developmental, social cognitive, and sociocultural perspective on motivation. *Contemporary Educational Psychology*, 61. Art 101859. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2020.101859

Efklides, A., Papadaki, M., Papantoniou, G., & Kiosseoglou, G. (1998). Individual differences in feelings of difficulty: The case of school mathematics. *European Journal of Psychology of Education*, 13(2), 207-226.

Efklides, A., Samara, A., & Petropoulou, M. (1999). Feeling of difficulty: An aspect of monitoring that influences control. *European Journal of Psychology of Education*, 14(4), 461-476.

Efklides, A. (2006). Metacognition and affect: what can metacognitive experiences tell us about the learning process? Educ Res Rev. 1(1), pp. 3-14.

Efklides, A. (2008). Metacognition: defining its facets and levels of functioning in relation to self regulation and co-regulation. *European Psychologist*, 13, 277–287. https://doi.org/10.1027/1016-9040.13.4.277

Efklides, A., & Touroutoglou, A. (2010). Cognitive interruption as an object of metacognitive monitoring: Feeling of difficulty and surprise. In: A. E. &. P. Misailidi (Ed.), *Trends and* *prospects in metacognition research* (pp. 171–208). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6546-2_6

Garofalo, J., & Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for research in mathematics education*, 16(3), pp. 163-176.

Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (1967). The discovery of grounded theory. Strategies for qualitative research. Aldine.

Greckhamer, T., & Koro-Ljungberg, M. (2005). The erosion of a method: Examples from grounded theory. *International Journal of Qualitative Studies in Education*, 18(6), pp. 729-750.

Harry, B., Sturges, K., & Klinger, J. (2005). Mapping the process: An exemplar of process and challenge in grounded theory analysis. *Educational Researcher*, 34(2), pp. 3-13.

Kumaravadivelu, B. (1991). Language-learning tasks: Teacher intention and learner interpretation. *ELT Journal*, 45(2), 98–107.

Lazarsfeld, P. F. (1958). Evidence and inference in social research. Daedalus, 87(4), 99-130.

Mills, J., Bonner, A., & Francis, K. (2006). *The development of constructivist grounded theory. International Journal of Qualitative Methods*, 5(1), Article 3. Retrieved June 19, 2006.

Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000). An investigation of teachers' beliefs of students' algebra development. *Cognition and Instruction*, 18, 209–237.

Nicchiotti, B., & Spagnolo, C. (accettato per la pubblicazione il 21/12/2023). Comparison between students and teachers' perceived difficulty of a mathematical task: an introductive investigation. In Inchley, C. (Ed.) *Proceedings of CIEAEM 74, Quaderni di Ricerca in Didattica*.

Nicchiotti, B., & Spagnolo, C. (accettato per la pubblicazione il 20/12/2023). Perceived difficulty of a mathematical task: do teachers and students have a common view? In *Proceedings of MAVI29*, Lumat.

Nuutila, K., Tapola, A., Tuominen, H., Molnar, G., & Niemivirta, M. (2021). Mutual relationships between the levels of and changes in interest, self-efficacy, and perceived difficulty during task engagement. *Learning and Individual Differences*, 92, Article 102090. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2021.102090

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Charlotte, NC: Information Age.

Radmehr, F., & Drake, M. (2017). Exploring students' mathematical performance, metacognitive experiences and skills in relation to fundamental theorem of calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(7), 1043–1071. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1305129

Saccoletto, M., & Spagnolo, C. (2022). Students' perceived difficulty of mathematical tasks: an investigation on influencing factors. *Didactica Mathematicae Journal*, 44, 59–79. https://doi.org/10.14708/dm.v44i1.7181

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of education*, 196(2), pp. 1-38.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press. http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511499944

Spagnolo, C., & Saccoletto, M. (2023a). Difficulty perception in answering argumentative INVALSI tests: a qualitative study. In: F. P. (Ed.), *The school and its protagonists: the students* (pp. 110-132). Milano: Franco Angeli.

Spagnolo, C., & Saccoletto, S. (2023b). How students view the difficulty of mathematical tasks: factors that influence their perceptions. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME13) (pp. 1498–1506). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Spagnolo, C., Capone, R., & Gambini, A. (2021). Where do students focus their attention on solving mathematical tasks? An eye tracker explorative study. In Inprasitha, M., Changsri, N., & Boonsena, N. (Eds), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol.4 (pp. 84-92). Khon Kaen, Thailand: PME.

Thevenot, C., & Oakhill, J. (2005). The strategic use of alternative representation in arithmetic word problem solving. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 58, 1311–1323. https://doi.org/10.1080/02724980443000593

Vicente, S., Orrantia, J., & Verschaffel, L. (2007). Influence of situational and conceptual rewording on word problem solving. *British Journal of Educational Psychology*, 77, 829–848. https://doi.org/10.1348/000709907X178200

Zan, R. (2007). Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire. Milano: Springer.

Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. (2006). Affect in mathematics education: an introduction. *Educational studies in mathematics*, 63(2), 113–121. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9028-2

Dall'Interpretative Knowledge (IK) alla Semiotic Interpretative Knowledge (SIK): l'importanza degli aspetti semiotici nel feedback agli studenti

Miglena Asenova*, Agnese Del Zozzo e Marzia Garzetti°**
***Libera Università di Bolzano, **Università di Trento, °Università di Genova**

1. Introduzione

L'obiettivo del contributo che verrà presentato durante il Seminario Nazionale è triplice: mettere in evidenza le origini della nozione di Semiotic Interpretative Knowledge (SIK) e presentare le sue basi teoriche (Asenova, Del Zozzo, & Santi, 2023a) (v. sezione 2); esporre i risultati ottenuti in relazione alla categorizzazione semiotica del feedback prodotto da insegnanti in formazione (Asenova, Del Zozzo, & Santi, 2023b) (v. sezione 3); presentare una prima proposta di operazionalizzazione del costrutto di SIK nell'ambito della formazione insegnanti (Asenova, Del Zozzo, & Garzetti, submitted) (v. sezione 4).

2. Le origini e le basi teoriche del costrutto di SIK

In Asenova et al. (2023a) viene messa in evidenza la necessità di una lente semiotica, accanto a quella strategica e concettuale, nell'interpretazione delle soluzioni 'non standard' degli studenti e vengono poste le basi teoriche della nozione di SIK come estensione dell'Interpretative Knowledge introdotta da Ribeiro e colleghi (2016). La SIK è "la conoscenza necessaria agli insegnanti per interpretare le risposte o i comportamenti degli studenti (siano essi standard o non standard) e dare loro un feedback appropriato nel momento in cui la conoscenza concettuale viene celata da difficoltà legate ai modelli di uso e produzione dei segni o da un uso inatteso o non standard degli stessi" (p. 11). In particolare, Asenova e colleghi mostrano come questo tipo di conoscenza possa risultare dirimente nel caso di interazione con studenti con DSA, che sono più propensi a utilizzare sistemi di rappresentazioni e strategie risolutive non standard (Del Zozzo & Santi, 2023). In generale, ogni studente si muove nel suo percorso di apprendimento all'interno di una rete di trasformazioni tra un ampio insieme di registri semiotici di rappresentazione seguendo configurazioni diverse, a seconda del suo modo specifico personale di conoscere. Pur essendo quindi particolarmente rilevante in un contesto in cui il docente si interfaccia con studenti con DSA, una SIK adeguata a dare senso alle risposte errate o inusuali degli studenti è fondamentale indipendentemente da tale specifico contesto, in quanto sostiene il diritto all'apprendimento di tutti e di ciascuno (Asenova et al., 2023a).

Nel seguito si presentano e contestualizzano gli elementi teorici su cui poggia il costrutto di SIK: la nozione di Interpretative Knowledge (IK) (Ribeiro et al., 2016), la teoria dei registri semiotici (Duval, 1995; 2017), comprese le funzioni semiotiche della concettualizzazione (D'Amore, 2003); le componenti dell'apprendimento matematico (Fandiño Pinilla, 2010).

2.1 La conoscenza interpretativa

Il riferimento all'IK ha la funzione di inquadrare la SIK all'interno delle conoscenze matematiche per l'insegnamento.

L'IK fa parte della conoscenza matematica "che permette agli insegnanti di dare un senso alle risposte non standard degli alunni (cioè, risposte adeguate che differiscono da quelle che gli insegnanti darebbero o si aspetterebbero) o alle risposte che contengono errori" (Ribeiro et al., p. 9, traduzione degli autori).

La nozione di IK si sviluppa nell'ambito della *Mathematical Knowledge for Teaching* introdotta da Ball e colleghi (2008). I ricercatori suddividono tale conoscenza in due ambiti principali (Figura 1): la *Subject Matter Knowledge*, associata alle specificità della matematica come disciplina, e la *Pedagogical Content Knowledge*, legata alle specificità dell'insegnamento e apprendimento della matematica. A loro volta, questi due ambiti sono suddivisi in sotto ambiti: di seguito si descrivono quelli coinvolti nella definizione della SIK.

- Per quanto riguarda la *Subject Matter Knowledge*:
    - la *Common Content Knowledg*e è legata a procedure, concetti, conoscenze matematiche generali;
    - la *Specialized Content Knowledge* riguarda le conoscenze matematiche specialistiche degli insegnanti, che sono necessarie e specifiche del lavoro che essi svolgono (p.e. i vari significati di frazione e la varietà di rappresentazioni a essi legati).
- Per quanto riguarda la *Pedagogical Content Knowledge*:
    - la *Knowledge of Content and Student* coinvolge la conoscenza delle possibili misconcezioni degli studenti e del loro agire in ambito scolare;
    - la *Knowledge of Content and Teaching* sono le conoscenze legate alla progettazione e messa in sequenza delle azioni di insegnamento, la scelta dei compiti ecc.

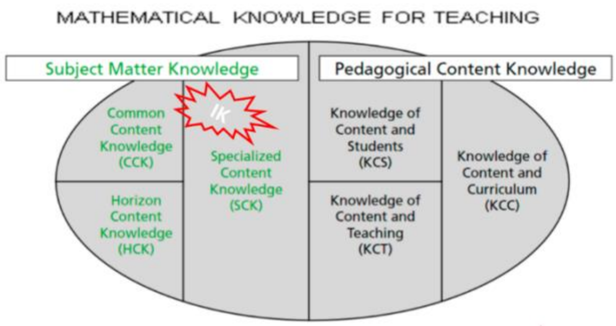


Figura 1: Gli elementi della Mathematical Knowledge for Teaching secondo Ball et al. (2008). Nello schema viene evidenziata la posizione dell'IK.

L'IK si situa nell'intersezione tra la Common Content Knowledge e la Specialized Content Knowledge (Figura 1): l'interpretazione di procedure non standard degli studenti richiede infatti una buona padronanza dei contenuti matematici in gioco e una padronanza di esempi, rappresentazioni, applicazioni proprie del contenuto affrontato in ottica didattica. Di Martino, Mellone e Ribeiro (2019) sottolineano come una forte Common Content Knowledge sia necessaria ma non sufficiente per sviluppare un buon livello di IK e che gli insegnanti con una forte Common Content Knowledge abbiano difficoltà ad accettare strategie o ragionamenti insoliti che differiscono dalle proprie.

La ricerca sull'IK ha approfondito gli aspetti concettuali, strategici e i fattori affettivi (Di Martino et al., 2019). Tuttavia, in essa resta ancora marginale l'esplorazione degli aspetti semiotici. La semiotica non è classificata come Mathematical Knowledge for Teaching di per sé, come lo sono per esempio gli elementi di geometria o algebra che vanno esplicitamente insegnati e appresi, ed è probabilmente per questo motivo che la ricerca in questa direzione risulta fino a oggi meno sviluppata (Asenova et al., 2023b).

Il costrutto di SIK estende quello di IK mettendo al centro la complessità semiotica dell'apprendimento matematico. Ciò è in linea con quanto proposto da Fandiño Pinilla (2023/2010) nella strutturazione delle componenti che caratterizzano l'apprendimento in matematica. Si richiama questa suddivisione brevemente per poi caratterizzare come la teoria dei registri semiotici di Duval ampli l'idea di IK.

2.2 Le componenti dell'apprendimento in matematica

L'elemento teorico relativo alle componenti dell'apprendimento è necessario per mettere in evidenza il legame tra le diverse sfaccettature dell'apprendimento e dell'insegnamento della matematica, ancorando la conoscenza professionale del docente alle esigenze di apprendimento dello studente.

Fandiño Pinilla (2023/2010) caratterizza l'apprendimento della matematica come composto da cinque componenti: *la componente concettuale*, legata alla comprensione dell'oggetto matematico in quanto tale; *la componente strategica*, legata al problem solving; *la componente algoritmica*, legata all'esecuzione di procedure e algoritmi; *la componente comunicativa*, che riguarda sia le modalità comunicative proprie della matematica, come per esempio il dimostrare, sia più in generale le pratiche comunicative che caratterizzano l'apprendimento; *la componente semiotica*, che riguarda la gestione dei segni in matematica e la relazione tra segni rappresentanti uno stesso oggetto. La componente semiotica è trasversale alle altre e caratterizza in modo specifico l'apprendimento matematico. Pur trattandosi di componenti riferibili all'apprendimento della matematica, centrati quindi sullo studente e sul suo rapporto con il sapere matematico, tutte queste componenti richiedono l'attenzione specifica da parte del docente e quindi competenze specifiche per essere rilevate e supportate. Proprio in questo senso, come già affermato in precedenza, la SIK estende l'IK, che si situa prevalentemente nell'ambito dell'apprendimento concettuale e strategico, alla componente semiotica dell'apprendimento matematico.

2.3 La Semiotica

L'elemento teorico legato alla semiotica approfondisce il ruolo degli aspetti semiotici nell'insegnamento-apprendimento e fornisce gli strumenti operativi per inquadrare l'attività semiotica che l'insegnante è chiamato a interpretare e mettere in atto.

Secondo Duval (2017) in matematica non è possibile fare riferimenti diretti agli oggetti della matematica, dal momento che questi non sono accessibili attraverso i sensi. La formazione dei concetti matematici avviene attraverso un complesso coordinamento di segni appartenenti a vari sistemi semiotici (Duval, 2017; Ernest 2006). Questo processo include trasformazioni di segni all'interno di un unico sistema semiotico (trattamenti) e tra sistemi semiotici differenti (conversioni). Tuttavia, la necessità di gestire questa complessità semiotica porta a un paradosso cognitivo, descritto come segue da Duval (2017): da un lato, la nostra comprensione degli oggetti matematici astratti deriva unicamente dalle attività semiotiche; dall'altro, tali attività presuppongono una conoscenza concettuale preesistente degli oggetti matematici da parte degli studenti. Il superamento di tale paradosso si basa sul coordinamento di tre funzioni semiotiche principali che guidano la concettualizzazione: la selezione dei tratti distintivi di un oggetto matematico, il trattamento all'interno dello stesso sistema semiotico e la conversione tra sistemi semiotici differenti (D'Amore, 2003).

In riferimento alle due macroaree descritte da Ball e colleghi (2008), la SIK estende l'IK per ciò che concerne le funzioni semiotiche e si colloca al confine tra la Subject Matter Knowledge e la Pedagogical Content Knowledge poiché il controllo di tali funzioni è collegato sia con la conoscenza matematica sia con la sua implementazione nell'attività di insegnamento-apprendimento guidata dall'insegnante.

Nella sezione seguente si mostra come la SIK intervenga nel processo di produzione di feedback dell'insegnante a partire da uno studio che ha coinvolto 200 docenti in formazione e si fornisce un esempio di analisi di feedback in tale prospettiva.

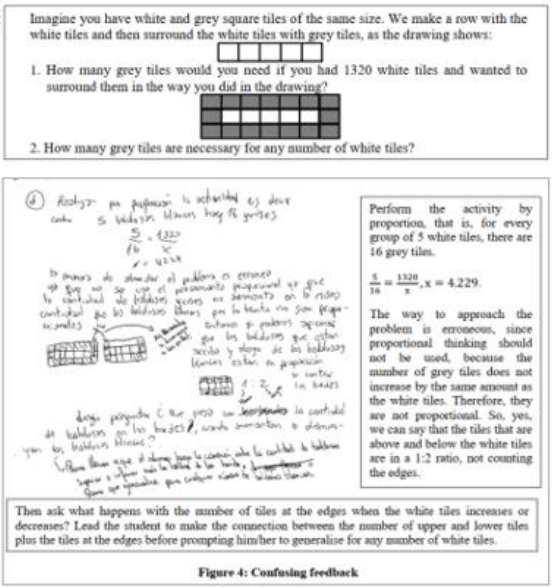
3. La categorizzazione semiotica del feedback prodotto da insegnanti in formazione

Come evidenziano Stovner e Klette (2022), fornire feedback è una pratica di insegnamento fondamentale: in una indagine condotta dall'OECD nel 2019, l'80% dei docenti intervistati afferma di fornire sempre o di frequente feedback immediato agli studenti mentre questi sono coinvolti in attività matematiche. La dimensione del feedback è fortemente interessata da un complesso coordinamento di funzioni semiotiche per la cui gestione è necessaria una notevole capacità interpretativa per fornire un feedback adeguato ed efficace. Data la mancanza di ricerche relative all'uso spontaneo di risorse semiotiche nei feedback degli insegnanti, in Asenova et al. (2023b) si amplia l'approccio al feedback basato sullo sviluppo di un IK adeguato, proposto da Galleguillos e Ribeiro (2019), con considerazioni relative alla SIK. L'obiettivo è quello di dimostrare che il costrutto di SIK rappresenta uno strumento teorico in grado di approfondire ulteriormente la natura del feedback degli insegnanti. In questo contesto le basi teoriche della SIK, presentate nel paragrafo 2.2, si arricchiscono con la componente relativa al feedback.

3.1 Il Feedback come parte del quadro teorico

Secondo Hattie e Timperley (2007), il feedback è definito come "l'informazione fornita da un agente (p.e. insegnante, pari, libro, sé stesso, esperienza) riguardo aspetti della propria performance o della propria comprensione" (p. 81, traduzione degli autori), il cui obiettivo è quello di colmare il divario tra ciò che è stato compreso e ciò che ci si aspetta venga successivamente compreso. Galleguillos e Ribeiro (2019) investigano l'abilità di insegnanti in formazione di utilizzare l'IK per fornire feedback e individuano quattro categorie principali: (a) feedback su come risolvere il problema; (b) feedback che può confondere lo studente, nonostante la correttezza del suo contenuto ('confusing feedback'); (c) controesempio come feedback; (d) feedback superficiale, troppo ampio o inconsistente. Come si può notare, il lavoro dei due ricercatori si focalizza sul contenuto del feedback ma non prende in considerazione gli aspetti semiotici. Tuttavia, come discusso in precedenza, tali aspetti possono essere cruciali nell'interpretazione delle risposte "non standard" degli studenti. A tale proposito in Figura 2 discutiamo brevemente, alla luce della SIK, una delle risposte analizzate in Galleguillos e Ribeiro (2019).

a)
b)



c)

Analizzando il feedback fornito insegnanti e classificato nella categoria 'confusing feedback' (Figura 2b), una lente semiotica sembra in grado di spiegare perché esso risulta 'confuso'. Notiamo che la conversione tra la rappresentazione che mostra correttamente l'aspetto di cui lo studente dovrebbe prendere consapevolezza per capire perché il ragionamento proporzionale non funziona in questo caso, e la sua rappresentazione nel registro del linguaggio naturale fallisce. Infatti, gli insegnanti rappresentano correttamente che le sei tessere 'di confine' non cambiano e che il ragionamento proporzionale è valido solo se non si considerano 'gli spigoli' (cioè le due colonne esterne), ma nel momento in cui cercano di esprimere questo aspetto nel registro del linguaggio naturale, non riescono a creare una corretta corrispondenza tra la rappresentazione pittorica (il numero di 'tessere di spigolo' non aumenta né diminuisce al variare del numero di tessere bianche) e la rappresentazione discorsiva ('le tessere grigie non aumentano della stessa quantità delle tessere bianche'). Così, gli insegnanti hanno scelto una prima rappresentazione semiotica adatta per fornire un feedback allo studente, ma non riescono a convertirla in un altro registro semiotico e questo rende il loro feedback confuso. Per un'analisi più dettagliata rinviamo ad Asenova et al., 2023a.

Figura 2. a) Quesito, tratto da Cañadas et al., 2008, e sottoposto ai docenti il cui feedback è stato analizzato da Galleguillos e Ribeiro (2019); **b)** Feedback fornito dai docenti al quesito e classificato come 'confusing feedback' da Galleguillos e Ribeiro (2019); **c)** Analisi del feedback sulla base degli elementi della SIK (Asenova et al., 2023a).

In particolare: la Figura 2a mostra il task (che gli autori hanno tratto da Cañadas et al., 2008); la Figura 2b, tratta da Galleguillos e Ribeiro (2019, p. 3285), rappresenta il feedback scritto da un gruppo di docenti in formazione dopo aver esaminato la soluzione di uno studente a tale task, feedback che gli autori hanno classificato nella categoria (b); la Figura 2c mostra l'analisi di tale feedback sulla base degli strumenti semiotici della SIK.

A partire da questi presupposti, in Asenova et al. (2023b) si pone il focus sull'esplorazione della questione se e in che senso i docenti in formazione iniziale fanno spontaneamente uso delle funzioni semiotiche e se c'è una differenza nella complessità dell'uso di tali risorse nel momento in cui interpretano la soluzione di uno studente per sé stessi e nel momento in cui sono invitati a fornire feedback allo studente. Di seguito descriviamo brevemente la metodologia ed esponiamo e discutiamo i risultati di tale ricerca.

3.2 Metodologia

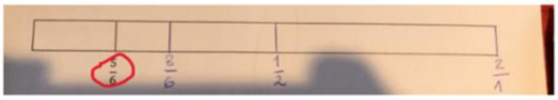
Nell'indagine sono stati coinvolti 180 studenti del primo anno del Corso di Laurea in Scienze delle Formazione Primaria (SFP) (futuri docenti di scuola primaria), 16 studenti del primo anno del Corso di Laurea di Matematica (futuri docenti di Matematica nella scuola secondaria di secondo grado), 4 studenti del Corso di Laurea in Didattica e Comunicazione delle Scienze (futuri docenti di Matematica e Scienze nella scuola secondaria di primo grado o di Scienze alla scuola secondaria di secondo grado). Ai partecipanti è stato chiesto di rispondere a un questionario. Tale questionario era finalizzato alla raccolta di dati sia sull'interpretazione da parte degli insegnanti in formazione iniziale delle risposte errate date da uno studente a quattro quesiti di matematica, sia sul feedback che avrebbero dato allo studente. Tra i 200 futuri insegnanti che hanno risposto al questionario, 21 hanno accettato di essere successivamente intervistati con l'obiettivo di indagare più in dettaglio il modo in cui veniva utilizzata la SIK per supportare le interpretazioni e il feedback.

Nella progettazione del questionario si è fatto riferimento alla metodologia descritta in Ribeiro et al. (2013). Invece di seguire integralmente tale approccio, che richiedeva ai partecipanti di risolvere prima il problema per poi valutare le soluzioni degli studenti, si è però scelto di presentare direttamente la soluzione dello studente, poiché il contesto non era quello di un corso di formazione. Successivamente è stato richiesto ai partecipanti prima di analizzare la soluzione dello studente per sé stessi (Domanda 1, D1, del questionario: 'Che cosa pensi sia successo?') e poi di fornire un feedback allo studente (Domanda 2, D2, del questionario: 'Come interverresti?'). Tale scelta metodologica è stata guidata dalla volontà di osservare il tipo di SIK impiegato spontaneamente dai partecipanti nei due casi.

Di seguito si presenta a titolo esemplificativo il primo dei quattro quesiti del questionario (Figura 3).

A partire dalla rappresentazione del numero 5/6, Gina deve rappresentate i numeri 8/6, 1/2 e 2.

L'immagine rappresenta la soluzione di Gina.



1.1 Che cosa è successo, secondo te? 1.2 Come interverresti?

Figura 3. Quesito 1 del questionario con le relative domande D1 e D2.[1]

La selezione del quesito presentato in Figura 3 è avvenuta per il suo potenziale nel promuovere l'impiego di funzioni semiotiche, in particolare di conversioni, che includono linguaggio simbolico, linguaggio naturale e rappresentazioni figurative. Criteri simili sono stati adottati anche nella scelta degli altri quesiti inseriti nel questionario, in linea con il focus della ricerca.

Le risposte dei partecipanti a D1 e D2 sono state categorizzate separatamente e per la classificazione sono state formulate le categorie presentate nelle Tabelle 1a e 1b: la prima colonna nella Tabella 1a riporta le categorie relative a D1, la prima colonna nella Tabella 1b riporta quelle relative a D2. In entrambe le classificazioni, le categorie sono state formulate in maniera tale da mettere in evidenza il grado di complessità delle funzioni semiotiche coinvolte, partendo da riferimenti di tipo solo concettuale e arrivando alla gestione di una rete complessa di scelta dei tratti distintivi, trattamenti e conversioni. Nelle tabelle, per ciascuna categoria, sono riportati degli esempi di risposte classificate in esse.

[1] Quesito concesso gentilmente della prof.ssa Cristina Sabena, ispiratasi alla ricerca della prof.ssa Elisabetta Robotti sull'insegnamento-apprendimento delle frazioni.

CODICE	DESCRIZIONE	ESEMPI
(0) - non risponde o la risposta non è classificabile	Campo vuoto o interpretazioni vaghe	«La risposta è sbagliata» «Ha invertito i numeri»
(1) - IK concettuale	Nessun riferimento a rappresentazioni semiotiche, solo a concetti e strategie	Si fa principalmente riferimento all'ordinamento tra frazioni, p.e. «Non è l'ordine corretto»
(2) - SIK-R	Solo rappresentazioni senza riferimento a trasformazioni semiotiche	«ha sbagliato la rappresentazione» «c'è un errore nella rappresentazione di ½»
(3) - SIK-T	Riferimento a trattamenti nello stesso registro semiotico	«per determinare la sequenza la frazione è una divisione di numeri e un mezzo corrisponde a 0,5 mentre 5/6 corrisponde a 0,8» «non ha diviso correttamente l'intero" «è partita da 5/6 e poi ha diviso la barra in ordine crescente»
(4) - SIK-C	Riferimento a conversioni tra diversi registri semiotici	«ha sbagliato a scrivere ½ al centro della barra, perché si è fatta ingannare pensando che corrispondesse alla metà della barra» «ha inserito 1/2 nel punto che rappresenta la metà del rettangolo, ma 1/2 corrisponde a 0,5 non a 1. L'esatta metà del rettangolo corrisponde ad 1 perché nella sua interezza misura 2»

Tabella 1.a. Categorie di risposta alla domanda D1 'Che cosa è successo, secondo te?'.

CODICE	DESCRIZIONE	ESEMPI
tipo (i)	Nessuna menzione delle funzioni semiotiche (feedback solo di tipo concettuale o strategico; in linea con Galegiullos e Ribeiro, 2019)	«Farei riflettere sui rapporti tra numeratore e denominatore» «con il procedimento giusto per capire come ordinare le frazioni in ordine crescente»
tipo (ii)	Uso di rappresentazioni semiotiche limitato al riconoscimento dei tratti distintivi	«Al posto di mettere su scritto i numeri frazionali, (...) avrei fatto colorare la riga in base al numero che occupava quella posizione» «Cambierei modo di rappresentare così che sia di più facile comprensione»
tipo (iii)	Uso di tratti distintivi e trattamenti	«Farei trasformare tutti i numeri con base 6 e diventerebbero 5/6 8/6 3/6 12/6, e li farei reinserire.» «Dividendo il numeratore per il denominatore posso rappresentare correttamente i numeri: 1/2, 5/6, 8/6, 2 (dal minore al maggiore)» «Le spiegherei che 1/2 (0,5) è più piccolo di 5/6 (0,84) e che dunque va posto all'inizio della sequenza.»
tipo (iv)	Uso di tratti distintivi, trattamenti e conversioni	«Spiegherei che ogni porzione di spazio determinata dal segmento è rappresentata da una frazione, perciò una piccola porzione equivale a un numero più piccolo» «Farei una rappresentazione a torta, colorando gli spicchi , facendo capire così la differenza tra le due frazioni» «Aggiungerei un altro rettangolo, lo dividerei in 6 piccoli sotto rettangoli, ne conterei 2 e aggiungerei la scritta 8/6»

Tabella 1. b. Categorie di feedback in risposta alla domanda D2 'Come interverresti?'.

La categorizzazione semiotica del feedback non fornisce di per sé livelli di efficacia, ma essa rappresenta uno strumento che permette di individuare livelli di complessità dell'attività semiotica nella produzione e nella valutazione del feedback. L'intervista successiva è stata condotta con le seguenti modalità: al docente in formazione è stato riproposto un quesito del questionario e gli sono state mostrate le sue risposte a D1 e D2; gli è stato poi richiesto di commentare le proprie risposte, rendendo più efficace il proprio feedback. L'obiettivo perseguito consisteva nel voler verificare se il docente in formazione avrebbe esteso il ricorso alle funzioni semiotiche rispetto a quanto fatto in risposta al questionario.

3.4 Risultati e discussione

Per garantire l'omogeneità del campione, l'analisi quantitativa dei dati è stata eseguita solo in riferimento al campione composto dai 180 studenti di SFP e solo in riferimento a due dei quattro quesiti, tra cui quello mostrato in Figura 3. Tale analisi ha fornito i seguenti risultati: (1) un'alta percentuale di risposte non valide a D1 (22,2%) e D2 (33,3%), che possono essere ricondotte a una scarsa competenza matematica che ostacola l'IK e il conseguente feedback; (2) un'alta percentuale di casi di ricorso all'IK, senza riferimento esplicito ad aspetti semiotici, con percentuale nettamente maggiore nel caso in cui i partecipanti interpretano la soluzione per sé stessi (52,2%), rispetto a quando formulano un feedback (34,4%); (3) in D1, una percentuale relativamente bassa (7,8%) di casi di ricorso a SIK-C nell'interpretazione della risposta dello studente; (4) in D2, una percentuale relativamente alta (22%) di casi di formulazione di feedback di tipo (iv) basato sull'implementazione delle tre funzioni semiotiche. L'analisi dei dati testimonia che molti insegnanti in formazione avvertono spontaneamente la necessità di fondare il loro feedback in una rete di diversi sistemi semiotici per ottenere una maggiore efficacia e chiarezza. Tuttavia, tale necessità può essere ostacolata dalla mancanza di competenze semiotiche adeguate. In Asenova et al. (2023b) è riportata in dettaglio l'analisi qualitativa dell'intervista a una delle future docenti di scuola primaria in cui si osserva come, per esempio, il mancato riferimento ai tratti distintivi dell'oggetto nel quesito iniziale ostacola la formulazione di un feedback efficace allo studente.

In generale è possibile affermare che, quando gli insegnanti in formazione iniziale ricorrono spontaneamente alla SIK, tendono a usare una complessa rete di funzioni semiotiche, specialmente quando forniscono feedback. Tuttavia, una gestione spontanea di tali risorse non sembra essere sufficiente per garantire l'efficacia del feedback dal punto di vista semantico e l'interiorizzazione della SIK sembra richiedere una formazione specifica nell'ambito della formazione docenti. Su questo aspetto, legato all'operazionalizzazione della SIK nell'ambito della formazione insegnanti, si focalizza la ricerca in fase di avvio che caratterizzeremo brevemente nel prossimo paragrafo.

4. Operazionalizzazione del costrutto di SIK nell'ambito della formazione insegnanti

La necessità di considerare la SIK come un tipo di conoscenza matematica per l'insegnamento (Ball et al., 2008) e come un'area di contenuto esplicita nella formazione degli insegnanti, in particolare in riferimento all'efficacia del feedback, si accompagna a una mancanza di ricerche in questa direzione. In occasione del prossimo Convegno FAME è stata sottomessa una proposta in tal senso (Asenova, Del Zozzo, & Garzetti, submitted). Il contributo presenta un modello per corsi di formazione per insegnanti che affronta questo problema. Di seguito vengono riportati brevemente gli elementi principali di tale proposta.

Il quadro teorico del corso si basa sulla dimensione semiotica e sulla dimensione del feedback descritte in precedenza. La domanda di ricerca a cui si intende dare una risposta è la seguente: quali sono le caratteristiche specifiche di un corso di formazione per insegnanti che sviluppa la SIK in relazione allo scambio e alla produzione di feedback?

Nel contributo sopramenzionato, le caratteristiche del corso vengono descritte sottolineando il loro legame con il quadro teorico introdotto e viene discussa la correlazione tra queste caratteristiche e le aspettative relative ai processi che si assume che i partecipanti metteranno in atto durante il corso. Riportiamo di seguito solo la tabella riassuntiva del modello base progettato (Tabella 2), in cui sono brevemente caratterizzate le cinque fasi in cui si articola un ciclo nonché l'obiettivo principale di ciascuna di esse.

	Fasi del modello		Obiettivo principale
1		Introduzione alle funzioni e alle trasformazioni semiotiche	Introduzione degli strumenti necessari per lo sviluppo della SIK
2		Task 1: Gli insegnanti danno, in piccolo gruppo, un feedback scritto alle soluzioni di studenti	Prima implementazione della SIK
3		Task 2: Gli insegnanti valutano, in gruppo e per iscritto, il feedback fornito da un altro gruppo rispetto a criteri legati alle funzioni semiotiche	Metariflessione sull'implementazione della SIK in relazione alle funzioni semiotiche
4		Scambio di feedback e riflessioni nei gruppi relativi alla valutazione ricevuta grazie al task 2	Metariflessione sulla valutazione della SIK: analisi del proprio lavoro
5		Feedback del formatore durante la discussione di classe	Istituzionalizzazione

Tabella 2. Modello di un ciclo di operazionalizzazione della SIK nel feedback dei corsi di formazione per insegnanti.

Il corso è progettato per supportare gli insegnanti ad usare consapevolmente le funzioni semiotiche per interpretare i comportamenti degli studenti e fornire loro feedback. L'idea è di promuovere l'accettazione di strategie non convenzionali e incoraggiare l'interpretazione delle risposte errate, valorizzando gli elementi concettuali o strategici efficaci, anche in presenza di rappresentazioni semiotiche atipiche o scorrette. Inoltre, nelle varie fasi dal corso, si richiede uno sforzo comunicativo mirato, specialmente nei meccanismi di feedback e nella scelta delle rappresentazioni.

5. Conclusioni

Come evidenziato nel lavoro di Asenova, Del Zozzo e Garzetti (submitted), lo sviluppo di una robusta SIK da parte dei futuri insegnanti o di quelli già in servizio rappresenta un passo fondamentale per supportarli nella comprensione delle risposte degli studenti ed essere efficaci nel sostenere e gestire il loro processo di apprendimento. Questo è particolarmente vero per l'uso delle funzioni semiotiche: si può assumere infatti che la scelta di un registro semiotico specifico e dei tratti distintivi da rappresentare rifletta le categorie concettuali che un individuo utilizza per interpretare la realtà.

Nei lavori qui esaminati sono stati definiti gli aspetti cruciali nella fondazione della SIK, ponendo le basi per la sua operazionalizzazione nella formazione dei docenti nonché per la futura definizione di principi di progettazione generali e per la valutazione dell'efficacia dei corsi.

Data la natura dei dati raccolti, l'analisi semiotica è stata finora prevalentemente di tipo strutturale, ma una estensione ad aspetti multimodali (Arzarello, 2006) potrebbe portare in futuro ad un ampliamento della gamma delle tipologie dei task (p.e. videoregistrazioni di studenti che risolvono un problema e a cui si chiede di fornire un feedback).

Un'ulteriore prospettiva di ricerca è invece legata all'approfondimento del ruolo del costrutto di SIK nel supportare la formazione insegnanti in una prospettiva etica e inclusiva. Questo problema aperto è alla base di un primo approccio di collaborazione con Maria Mellone, Arne Jakobsen e Miguel Ribeiro, che ringraziamo per la squisita disponibilità al dialogo e alla collaborazione.

Riferimenti bibliografici

Arzarello, F. (2006). Semiosi as a multimodal process. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), Semiotics, Culture and Mathematical Thinking [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 267–299.

Asenova, M., Del Zozzo, A., & Santi, G. (2023a). Unfolding Teachers' Interpretative Knowledge into Semiotic Interpretative Knowledge to Understand and Improve Mathematical Learning in an Inclusive Perspective. *Education Sciences*, 13(1), 65. https://doi.org/10.3390/educsci13010065

Asenova, M., Del Zozzo, A., &, Santi, G. (2023b). From Interpretative Knowledge to Semiotic Interpretative Knowledge in prospective teachers' feedback to students' solutions. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel, & M. Tabach (Eds.), *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 51–58). PME.

Asenova, M., Del Zozzo, A., & Garzetti, M. (submitted). Enhancing Teacher Training in Mathematics Education: A Model for a Semiotic Approach to Feedback and Interpretative Knowledge. *Contributo sottomesso al first ERME topic conference on Feedback & Assessment in Mathematics Education (FAME)*.

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal for Teacher Education*, 59, 389–408. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Cañadas, M. C., Castro, E., & Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3° y 4° de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, 2(3), 137–151.

D'Amore, B. (2003). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the Learning of Mathematics*, 23, 47–51.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M.I. (2007). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. *La matematica e la sua didattica*, 21(1), 87–92.

Del Zozzo, A., & Santi, G. (2023). L'inclusione in matematica come differenziazione per tutti e per ciascuno: un'interpretazione semiotica. *CEMER*, 13(2), 68–79.

Di Martino, P., Mellone, M., & Ribeiro, M. (2019). Interpretative Knowledge. In S. Lerman (2019). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100019-1.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels*. Lang.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking: The Registers of Semiotic Representations*. Springer.

Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: The case of number. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 67–101.

Fandiño Pinilla, M.I. (2023). *Diversi aspetti che definiscono l'apprendimento e la valutazione in matematica*. Bonomo. (Lavoro originale del 2010, Edizione Pitagora).

Galleguillos, J., & Ribeiro, M. (2019). Prospective mathematics teachers' interpretative knowledge: Focus on the provided feedback. In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of CERME11*, February 6–10, 2019, Utrecht (pp. 3281–3288). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81–112. https://doi.org/10.3102/003465430298487

Ribeiro, C., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2013). Characterizing Prospective teachers' knowledge in/for giving sense to students' productions. In A. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 89–96). PME.

Ribeiro, C., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2016). Interpreting students' non-standard reasoning: Insights for mathematics teacher education. *For the Learning of Mathematics*, 36(2), 8–13.

Stovner, R.B., & Klette, K. (2022). Teacher feedback on procedural skills, conceptual understanding, and mathematical practices: A video study in lower secondary mathematics classrooms. *Teaching and Teacher Education*, 110, 103593. https://doi.org/10.1016/j.tate.2021.103593

Interdisciplinarità tra matematica e fisica: sviluppo di un framework integrato per promuovere l’innovazione nella formazione degli insegnanti di scuola secondaria

Laura Branchetti* e Lorenzo Pollani**
***Università Statale di Milano, **Università di Roma – Sapienza**

Introduzione

Numerose ricerche e documenti istituzionali hanno evidenziato, soprattutto nell’ultimo decennio, alcune limitazioni dell’attuale impostazione della formazione secondaria e terziaria, che non sembra adeguata a fronteggiare la crescente complessità delle sfide sociali contemporanee e future (Kapon & Erduran, 2021). Tra le problematiche emerse è stato evidenziato il disallineamento tra l’organizzazione verticale e iperspecializzata della didattica delle discipline e il carattere inter-multi-transdisciplinare dell’innovazione e gli sforzi per contribuire a creare la cosiddetta “società della conoscenza” (UNESCO, 2005). Come sottolineato da Cédric Villani in una delle conferenze plenarie di ICME-14 (Villani, 2021), le sfide del presente richiedono non solo un *expertise* disciplinare ma anche la capacità di articolare dialoghi, talvolta molto complessi, con esperti di altre discipline, scientifiche e non, con chi si occupa di sviluppo tecnologico, con esperti di scienze sociali, *policy makers*. In alcuni casi è in gioco la capacità stessa di comprendere la portata dei cambiamenti che sconvolgono la società (intelligenza artificiale, fenomeni intrinsecamente complessi come l’evoluzione delle pandemie o il cambiamento climatico, computer quantistici), e trovare uno spazio nel dibattito pubblico su questi temi. In gioco c’è anche la capacità, nel caso di soggetti che rappresentano la voce della matematica e delle scienze nei diversi contesti, di contribuire alla strutturazione stessa del dibattito e portarlo su un terreno che permetta di mettere in discussione visioni assolute e creare lo spazio di discussione: “One always has to think “is this really true? Can I contradict? Where is the logical reasoning?” etc etc. That’s what we do at the scientific parliamentary office organizing the political debate, which is the basis of democracy. The heart of democracy is the contradictory, open, sincere debates of ideas” (Villani, 2021, p.15). Se è vero che la storia della matematica e delle scienze è maestra nel mostrare la natura evolutiva della conoscenza, grazie alla continua contaminazione tra ambiti e alla continua messa in discussione della conoscenza stessa, è altresì vero che non è sufficiente avere conoscenze disciplinari per poter dialogare e collaborare in modo proficuo in contesti in cui, oltre alla conoscenza delle discipline, è necessario avere consapevolezza della natura delle conoscenze in gioco e delle assunzioni e tradizioni che stanno alla base delle diversità tra i diversi interlocutori. Il dialogo stesso tra esperti, a vario titolo, di matematica e scienze è spesso difficile e conflittuale, e l’incapacità di articolare il confronto porta spesso al tacito accordo di non discutere, non collaborare e rispettare rigorosamente i confini e le zone di *comfort*.

Tutto ciò si acuisce nella scuola, spesso caratterizzata dalla frammentarietà del sapere, e porta gli insegnanti a organizzare l’attività didattica in modo da definire il più possibile il confine della loro disciplina (anche nel caso di classi di concorso come Matematica e Fisica, o Matematica e Scienze), senza contaminazioni che immediatamente renderebbero necessarie altre competenze e conoscenze per non generare contraddizioni, confusione e senso di disorientamento. Nonostante il proliferare di progetti scolastici, programmi di finanziamento per promuovere l'insegnamento STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) nell'ambito del PNRR e sollecitazioni da parte dell'Unione Europea volte a promuovere un'innovazione in tal senso, la realtà scolastica mostra una situazione nei fatti ben diversa. Per gli insegnanti queste sfide sono molto complicate da gestire: la formazione che hanno ricevuto non permette loro di ripensare l'attuale organizzazione della conoscenza in discipline, e spesso nemmeno di ripensare l'insegnamento della propria disciplina per far fronte a cambiamenti inevitabili della società. Non è comune che gli insegnanti siano portati a riflettere, anche se coinvolti negli attuali programmi di formazione iniziale, sugli impliciti che stanno dietro all'organizzazione stessa del sapere in discipline, sul processo di "disciplinarizzazione" (Satanassi et al., 2023), sulle radici epistemiche dei diversi saperi (Williams & Roth, 2019) e sulla molteplicità di relazioni che possono esserci, ad esempio, tra quelle che oggi chiamiamo *matematica* e *fisica*. Come sottolineato dagli autori è importante, per porre in modo critico il problema, saper andare oltre le discipline e non solo saperle analizzare da un punto di vista *meta;* si parla di "beyond-disciplinarity, which is not only 'meta', but 'knowingly un-disciplined', i.e. to some extent "freed from the disciplines that bind problem-solving and inquiry to disciplinary norms and their limits" (ibid., p. 15).". Nell'affermare questo, gli autori si rifanno a una critica di Williams (2016) alla retorica in favore dell'educazione STEM, in cui l'autore ispirandosi a un'analisi critica di Foucalt la cultura stessa della disciplinarizzazione, sottolinea il fatto che essere, provocatoriamente, "indisciplinati" permette di de-costruire, il legame tra l'attuale organizzazione della conoscenza in discipline e una specifica visione del cittadino e del ruolo della scuola nella società. Il modo in cui si pone il problema è dunque cruciale. Da questa prospettiva il passaggio a una didattica STEM orientata ai bisogni che provengono dal mondo del lavoro non è una prospettiva da accogliere senza riflessione, perché costituirebbe un'occasione persa per mettere favorire lo sviluppo di uno spirito critico rispetto al ruolo che le discipline hanno nell'educazione dei cittadini.

Problemi di ricerca

Per un insegnante è molto importante sentire di poter "dominare" ciò che insegna e questa esigenza, unita alla tradizionale visione mono-disciplinare dell'insegnamento, non porta solitamente ad immaginare, quando si parla di STEM, altro che situazioni al massimo multi-disciplinari, dove ogni insegnante mette un tassello in un puzzle a cui si chiede agli studenti stessi di dare senso. Si auspica che in futuro a questa situazione possa sostituirsi un'armonia tra voci, per la costruzione collettiva di un orizzonte di senso, un recupero delle radici comuni delle discipline e un confronto consapevole tra le loro specificità, ma questo richiede, a nostro parere, una formazione specifica, la quale richiede di sviluppare un nuovo paradigma di ricerca in ambito didattico e non solo di giustapporre quelli attuali. Quale conoscenza è necessaria per un docente per poter ripensare gli impliciti dell'organizzazione in discipline e sviluppare la capacità di promuovere una didattica interdisciplinare orientata al pensiero critico? Quali approcci alla formazione degli insegnanti permettono di raggiungere questo scopo?

Il paradigma di ricerca di cui presenteremo le principali assunzioni e alcuni risultati è frutto di una collaborazione di lungo periodo (dal 2013 ad oggi) tra ricercatrici e ricercatori in didattica della matematica e della fisica, in parte estesa anche a ricercatori in didattica dell'informatica, ha come scopo quello di fornire alcune risposte a queste domande. Tale collaborazione ha visto coinvolte principalmente Laura Branchetti e Olivia Levrini, ma si è sempre svolta, a livello nazionale, in collaborazione con insegnanti di matematica e fisica (soprattutto del Liceo scientifico "Albert Einstein", Rimini), docenti universitari (Alessia Cattabriga, Elisa Ercolessi, Sebastiano Moruzzi, Matteo Viale), ricercatori e ricercatrici (in particolare Paola Fantini, Sara Satanassi, Giulia Tasquier, Eleonora Barelli, Michael Lodi), dottorandi (in particolare, Pollani).

Dal 2016 a oggi la collaborazione si è estesa ad altri gruppi di ricerca e enti di formazione, prevalentemente in ambito europeo. Alcuni progetti europei (IDENTITIES, https://identitiesproject.eu/; FEDORA, https://www.fedora-project.eu/) hanno affrontato nello specifico queste problematiche, sia analizzando i fattori di natura istituzionale, epistemologica, affettiva e linguistica che ostacolano la costruzione di uno spazio di confronto e collaborazioni interdisciplinari, sia riflettendo dal punto di vista teorico sulla costruzione di un quadro che supportasse in maniera coerente e produttiva questo cambio di paradigma. I progetti, non senza difficoltà, hanno fatto della costruzione di una nuova cultura dell'interdisciplinarità un principio guida, e non solo un obiettivo contingente, coinvolgendo insegnanti e ricercatori con diversi background disciplinari, e arrivando alla costruzione di un framework e di metodologie di indagine che tenessero in considerazione e armonizzassero conoscenze, tradizioni e valori di diverse didattiche disciplinari e nuove istanze provenienti dalla società contemporanea.

Uno degli interessi specifici di ricerca, molto importante per il gruppo italiano, è stata la messa a punto di modelli per la formazione iniziale interdisciplinare orientati allo sviluppo di un pensiero critico sulle discipline, le loro relazioni e il loro ruolo nell'educazione del cittadino (nel senso precisato in precedenza), con particolare attenzione ai futuri insegnanti di matematica e fisica di scuola secondaria. Considerata la natura fortemente istituzionale della suddivisione del sapere in discipline, sia nella scuola che all'università, una delle azioni chiave individuata per promuovere la ricerca per l'innovazione è stata quella di cercare "prototipi" rilevanti dal punto di vista epistemologico e istituzionale e progettare moduli di formazione iniziale che permettessero al futuro insegnante di progettare attività e gestire dibattiti interdisciplinari in classe su questi temi, a partire dagli attuali contenuti delle Indicazioni nazionali, focalizzandosi quindi su aspetti curriculari. Sono stati messi a punto due modelli: uno in cui i futuri insegnanti coinvolti e i ricercatori hanno lo stesso background disciplinare prevalente (ad es. corsi di Didattica della matematica rivolti a studenti di Matematica), e uno basato sul co-teaching interdisciplinare, con studenti con background diversi (ad. es. studenti di Matematica e Fisica con formatori esperti in didattica della matematica e della fisica).

Stato dell'arte del progetto di ricerca

La scelta del focus della ricerca descritto in precedenza, che sosteniamo sia di interesse da vari punti di vista per ricercatori e formatori in didattica della matematica, rende necessario affrontare in particolare due questioni: che tipo di *expertise* è necessario per questo profilo di insegnante e quali metodologie di formazione possono promuoverlo.

La messa a punto di metodologie di formazione iniziale interdisciplinare è stata realizzata in diversi step seguendo la filosofia della *design-based research* (*''Design-Based Research'*, 2003), ed è tuttora in corso. In una prima fase sono stati progettati moduli per la formazione iniziale, sperimentati in Italia in diverse edizioni di corsi PLS sull'interdisciplinarità tra matematica e fisica (problema del corpo nero con attenzione alle forme di ragionamento matematico e alle relazioni tra teoria ed esperimento nel passaggio alla fisica quantistica; modelli e *epistemic games* nella risoluzione di problemi di elettromagnetismo; relatività; argomentazione e dimostrazione in matematica e fisica, con particolare attenzione allo studio dei moti e delle coniche). Alcuni di questi corsi sono stati realizzati anche in contesti di formazione iniziale in modalità co-teaching e accompagnati da ricerche relative (analisi storico-epistemologica in prospettiva interdisciplinare di fonti storici e materiali didattici solitamente analizzati solo da una prospettiva disciplinare; raccolta e analisi di dati; elaborazione e validazione di *design principles*; un esempio è presentato in Branchetti et al., 2019). Nel quadro dei progetti europei, sono stati progettati e sperimentati diversi moduli didattici in contesti nazionali (Italia, Francia, Spagna, Grecia) e in due *summer school* internazionali rivolte a futuri insegnanti e a dottorandi nelle didattiche disciplinari. L'analisi del processo di co-design e l'analisi dei dati ha condotto all'elaborazione di un nuovo quadro integrato e contributo a fornire risultati relativi al modo in cui i futuri insegnanti si relazionano col problema dell'interdisciplinarità su tematiche curriculari, in particolare come reagiscono al tentativo di messa in discussione dei confini disciplinari, quali strategie adottano per far fronte allo spaesamento che ne consegue (in un nuovo senso, ispirato al *dépaysement épistémologique* studiato da Furinghetti (2007) nel caso della storia della matematica), quali riflessioni di tipo meta- e beyond-disciplinary emergono sulle discipline e sul senso stesso della disciplinarizzazione (Satanassi et al, 2023; Branchetti e Levrini, under review).

Sono in corso sperimentazioni nelle scuole che partecipano al progetto Liceo Matematico nel contesto milanese, condotte da insegnanti in servizio con la partecipazione dei ricercatori nella fase di design e implementazione nelle classi.

Quadro (concettuale, verso un quadro teorico)

In questo seminario intendiamo presentare il framework e i principi di *design* di attività di formazione iniziale interdisciplinare messi a punto all'interno dei progetti, e uno studio specifico, attualmente in corso nel contesto italiano, in cui ci si propone di affrontare problemi ancora aperti, con un consolidamento del framework accompagnato dallo sviluppo di nuove lenti di analisi a partire da costrutti già esistenti.

Nei progetti citati il problema dell'interdisciplinarità è affrontato e concettualizzato attraverso lenti teoriche coerentemente combinate localmente e parzialmente integrate dal punto di vista teorico: il *Family Resemblance Approach* (FRA, nella sua versione adattata al caso della *Nature of Science*) (Erduran & Dagher, 2014), le nozioni di *boundary object*, *boundary crossing* e *boundary people* di Akkerman e Bakker (2011), la tassonomia dell'interdisciplinarità di Klein (2010) e alcuni elementi della teoria antropologica della didattica (ATD). A queste si aggiungono, caso per caso, lenti analitiche specifiche tipiche delle didattiche disciplinari adattate al problema interdisciplinare in questione (ad es. unità cognitiva, comportamento razionale, funzioni della dimostrazione; critical detail, appropriazione)

Un primo risultato è la necessità di tener conto di ciò che caratterizza le identità disciplinari nei contesti istituzionali in questione (scuola, università) nell'approccio all'interdisciplinarità (Barelli et al., 2022). In particolare, è stato mostrato come si possa instaurare un circolo virtuoso nella formazione iniziale facendo in modo che un approccio interdisciplinare aiuti a comprendere meglio le discipline coinvolte (Branchetti et al., 2019). La concezione stessa di disciplina richiede una revisione dal punto di vista teorico al fine di modellizzare l'emergere delle identità disciplinari dei futuri insegnanti e dei ricercatori nei contesti di co-design e sperimentazione e dare strumenti per analizzare criticamente le nuove forme di conoscenza e insegnamento alla base del nuovo approccio.

Il concetto di *family resemblance* permette di tenere conto delle similarità e idiosincrasie dal punto di vista epistemico (che include i valori fondanti di una comunità disciplinare), istituzionale e sociale, ed è essenziale per passare da una visione "geopolitica" delle discipline come stati chiusi, confinanti con altri, con precise frontiere (e spesso in conflitto con gli altri), alla visione delle persone in formazione e degli inseganti come membri di una comunità con elementi comuni e somiglianze ma anche idiosincrasie, molteplicità di obiettivi e valori, possibilità di evoluzione, contaminazione e cambiamento. Il ripensamento del concetto di identità e della relazione tra identità dell'individuo e della comunità è cruciale, in questa prospettiva, per ripensare queste relazioni, ed è un obiettivo in corso di realizzazione.

Altro elemento di innovazione è stata la caratterizzazione del "*boundary* tra discipline", per poter efficacemente adattare il framework di Akkerman e Bakker, pensato per comunità in interazione, e per superare la logica tradizionale del confine come linea che separa e non come zona di scambio e trasformazione. In Satanassi et al. (2023) è stato messo in luce come le ambiguità produttive che caratterizzano i *boundary objects* e le caratterizzazioni stesse delle discipline siano la chiave per innescare meccanismi di appropriazione della problematica dell'interdisciplinarità nei futuri insegnanti.

Queste due innovazioni sul piano teorico hanno ricadute metodologiche concrete nella progettazione dei moduli, sia in termini di presentazione delle problematiche in esame, sia in termini di interazione con altri studenti (della stessa o di altre discipline) e con i documenti storici e materiali didattici (risorse, libri di testo;si veda ad esempio Branchetti et al., 2022); mostreremo il caso del modulo su argomentazione e dimostrazione nello studio dei moti e delle curve. In Branchetti e Levrini (under review) si utilizza la lente di incontro critico con l'Altro (Radford e Santi, 2022) per descrivere e analizzare le interazioni tra futuri insegnanti con background diversi in una zona di confine sul tema della dimostrazione in fisica e matematica.

Un esempio di nuovo problema di ricerca aperto: l'*expertise* interdisciplinare del futuro insegnante

Per differenziare approcci che sfidano le attuali visioni disciplinari da quelli STEM, più orientati a sviluppare nuove forme di collaborazione interdisciplinare in progetti extracurriculari, sono state definite due tipologie di interdisciplinarità, che conducono a profonde differenze in termini di *design*: quella curricolare, che abbiamo presentato in precedenza, e quella che caratterizza nuove discipline emergenti che integrano conoscenze consolidate con problematiche contemporanee legate anche mondo produttivo e sociale, che richiedono nuovi approcci integrati STEM (Nipyrakis et al., 2023; Branchetti et al., under review)

Il passaggio al libro di testo ha sempre avuto un ruolo cruciale nel *design* dei moduli in prospettiva curriculare. Da una parte, essendo una risorsa curricolare (Pepin & Haggarty, 2001), il libro di testo è vicino alla futura pratica scolastica di insegnamento, e riteniamo quindi importante che l'insegnante si confronti con esso durante la formazione. Gli autori dei libri di testo effettuano (spesso implicitamente) scelte epistemologiche più o meno consapevoli nella presentazione delle discipline (matematica e fisica) e sulla loro relazione, promuovendo solitamente una visione strumentale dell'interdisciplinarità (matematica come strumento per la fisica; fisica come contesto di applicazione per la matematica) (Bagaglini et al., 2021; Branchetti et al., 2022; Pollani et al., 2022), che riflette la disciplinarizzazione attuale.

Durante alcune sperimentazioni (sia a livello nazionale che internazionale), la richiesta agli insegnanti di riflettere su libri di testo, si è rivelata critica. Infatti, in questa fase, gli insegnanti tengono raramente in considerazione le riflessioni avanzate (storiche, epistemologiche, disciplinari, interdisciplinari) sviluppate nelle fasi precedenti. È quindi emerso il problema di caratterizzare la prospettiva da cui e attraverso cui gli insegnanti analizzano i libri di testo, perché essa rivela un cambio di atteggiamento nel passaggio all'analisi in prospettiva didattica, pensandosi come futuri insegnanti, membri di un'istituzione di cui hanno fatto parte come studenti ma sulla cui organizzazione non hanno mai riflettuto criticamente. Riteniamo inoltre che un cambio nel modo di analizzare materiali didattici istituzionali come i libri di testo sia testimonianza dello sviluppo di un pensiero critico sulle discipline, le loro mutue relazioni e l'educazione. Per tale ragione lo studio dell'evoluzione dello sguardo dell'insegnante sui libri di testo in ottica disciplinare e interdisciplinare durante il percorso formativo costituisce un indicatore di efficacia della formazione,e una caratterizzazione del suo *expertise,* che è l'oggetto di ricerca del progetto di dottorato di Lorenzo Pollani, che contribuisce alla *design-based research* in corso.

Sono state condotte due sperimentazioni in corsi universitari di didattica della matematica nel corso di laurea magistrale in matematica, a Milano (studio pilota) e a Genova. L'attività di formazione su cui entrambe si concentravano richiedeva ai futuri insegnanti di analizzare estratti da libri di testo per la scuola secondaria di matematica e di fisica attraverso la lente della razionalità di Habermas (2003). Questa lente è stata scelta sia per motivi contingenti (già nota ai futuri insegnanti) sia per motivi metodologici (permette di focalizzarsi sulla visione delle discipline e dell'interdisciplinarità veicolate nel libro di testo).

Un primo risultato emerso nello studio pilota conferma che gli insegnanti tendono a considerare aspetti poco rilevanti da un punto di vista sia disciplinare che interdisciplinare (Pollani & Branchetti, 2022). Un secondo risultato è l'evidenza del fenomeno da noi chiamato *disciplinary capture* (Pollani & Branchetti, 2022; Branchetti et al., 2023). Questo fenomeno può manifestarsi come una deformazione, riconcettualizzazione o appiattimento delle problematiche, dell'epistemologia e dei valori di una o più discipline (in quel caso, la fisica), considerate "altro" rispetto alla propria identità o alle discipline della propria formazione (in quel caso, la matematica).

Durante il secondo studio, l'analisi in termini di razionalità è stata preceduta da una prima fase di analisi senza un costrutto teorico esplicitamente condiviso con gli insegnanti. Questo per studiare in che misura la razionalità potesse favorire il passaggio da un'analisi naïve e scolastica ad una più strutturata e consapevole di ciò che il testo veicola delle discipline e della loro relazione. L'analisi dei dati è in corso.

Per questo studio è stata adattata una lente teorica introdotta da Mason (1998). In questa prospettiva, il problema della formazione insegnanti si configura come passaggio da uno stato di *novice* ad uno stato di *expert*, tra loro differenti nella struttura dell'attenzione. È naturale quindi l'esigenza di caratterizzare l'*expertise* (epistemologica ma anche cognitiva, emotiva e istituzionale) di un "insegnante esperto interdisciplinare" (Pollani & Branchetti, 2022; Pollani et al.; 2022; Branchetti et al., 2023). Assumendo che l'interdisciplinarità si distingua dalla multidisciplinarità in quanto questa coinvolge una giustapposizione mentre la prima l'interazione e l'integrazione tra discipline (Klein, 2010), sembra ragionevole pensare che il nostro profilo obiettivo non sia la "somma giustapposta" di esperto insegnante di matematica *ed* esperto insegnante di fisica.

Un secondo risultato è stato a livello di *design* della metodologia di formazione. Per analizzare la "qualità" dell'expertise, abbiamo operazionalizzato la struttura triadica dell'attenzione (*locus*, *form* e *focus*), chiave nella formazione dell'esperto (Mason, 1998), combinandola con il costrutto di *critical detail* (Viennot & Décamp, 2018). In questo modo, abbiamo sottolineato come le riflessioni degli insegnanti, anche laddove *localizzate* su *critical details* nel libro di testo, non sempre *focalizzino* aspetti importanti da un punto di vista disciplinare o interdisciplinare (Pollani & Branchetti, 2022; Branchetti et al., 2023).

Riferimenti bibliografici:

Akkerman, S. F., & Bakker, A. (2011). Boundary Crossing and Boundary Objects. *Review of Educational Research*, 81(2), 132–169. https://doi.org/10.3102/0034654311404435

Bagaglini, V., Branchetti, L., Gombi, A., Levrini, O., Satanassi, S., & Viale, M. (2021). Il ruolo del testo nell'interdisciplinarità tra matematica, fisica ed educazione linguistica: Il tema del moto parabolico tra testi storici e manuali di fisica per la scuola secondaria di secondo grado. *Italiano a scuola*, 3(1), 133–184. https://doi.org/10.6092/ISSN.2704-8128/13083

Barelli, E., Barquero, B., Romero, O., Aguada, M. R., Giménez, J., Pipitone, C., Sala-Sebastià, G., Nipyrakis, A., Kokolaki, A., Metaxas, I., Michailidi, E., Stavrou, D., Lodi, M., Sbaraglia, M., Bartzia, E.-I., Modeste, S., Martini, S., Durand-Guerrier, V., Sara Satanassi, … Levrini, O. (2021). Disciplinary identities in interdisciplinary topics: Challenges and opportunities for teacher education. In G. S. Carvalho, A. S. Afonso, Z. Anastácio, M. Evagorou, & M. R. Jimenez Liso (Eds.), *Fostering scientific citizenship in an uncertain world (Proceedings of ESERA 2021), Part 13 (co-ed. M. Evagorou & M. R. Jimenez Liso)* (pp. 934–943). University of Minho.

Branchetti, L., Cattabriga, A., Levrini, O. (2019). Interplay between mathematics and physics to catch the nature of a scientific breakthrough: The case of the blackbody, *Phys. Rev. Phys. Educ. Res*. 15

Branchetti, L., Cattabriga, A., Levrini, O., & Satanassi, S. (2022). Continuity and rupture between argumentation and proof in historical texts and physics textbooks on parabolic motion. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 109–116). Free University of Bozen-Bolzano.

Branchetti, L., Morselli, F., & Pollani, L. (2023). Interdisciplinary task design for pre-service teacher education: Learning potentials at the boundary between mathematics and physics. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME13) (pp. 3345–3352). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Branchetti, L., & Levrini, O. (under review). Critical encounters with interdisciplinarity in mathematics pre-service teacher education. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*.

Erduran, S., & Dagher, Z. R. (2014). *Reconceptualizing the nature of science for science education: Scientific knowledge, practices and other family categories* (Vol. 43). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9057-4

Furinghetti, Fulvia (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 131-143.

Habermas, J. (2003). Truth and justification. MIT Press.

Kapon, S., & Erduran, S. (2021). Crossing Boundaries – Examining and Problematizing Interdisciplinarity in Science Education. In O. Levrini, G. Tasquier, T. G. Amin, L. Branchetti, & M. Levin (Eds.), *Engaging with Contemporary Challenges through Science Education Research* (Vol. 9, pp. 265–276). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-74490-8_21

Klein, J. T. (2010). A taxonomy of interdisciplinarity. In R. Frodeman, J. T. Klein, & C. Mitcham (Eds.), *The Oxford handbook of interdisciplinarity* (pp. 15–30). Oxford University Press.

Mason, J. (1998). Enabling Teachers to be Real Teachers: Necessary Levels of Awareness and Structure of Attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, 243–267. https://doi.org/10.1023/A:1009973717476

Nipyrakis, A., Barquero, B., Branchetti, L., Durand-Guerrier, V., Kokolaki, A., Stavrou, D., & Levrini, O. (2023). Interdisciplinary Pre-service Teacher Training. *National Association for Research in Science Teaching* (NARST).

Pepin, B., & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: A way to understand teaching and learning cultures. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 33(5), 158–175. https://doi.org/10.1007/BF02656616

Pollani, L., & Branchetti, L. (2022). An experience of exploring the boundary between mathematics and physics with preservice teachers. In M. Trigueros, B. Barquero, R. Hochmuth, & J. Peters (Eds.), *INDRUM2022 Proceedings* (pp. 425–434). University of Hannover and INDRUM.

Pollani, L., Branchetti, L., & Morselli, F. (2022). Habermas' construct of rationality to bring out mathematics and physics disciplinary identities. In C. Fernández, S. Llinares, Á. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, p. 276). Universidad de Alicante.

Radford, L., & Santi, G. (2022). Learning as a critical encounter with the other: Prospective teachers conversing with the history of mathematics. *ZDM – Mathematics Education*, *54*(7), 1479–1492. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01393-z

Satanassi, S., Branchetti, L., Fantini, P., Casarotto, R., Caramaschi, M., Barelli, E., & Levrini, O. (2023). Exploring the boundaries in an interdisciplinary context through the Family Resemblance Approach: *The Dialogue Between Physics and Mathematics. Science & Education*. https://doi.org/10.1007/s11191-023-00439-2

Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. (2003). *Educational Researcher,* 32(1), 5–8. https://doi.org/10.3102/0013189X032001005

UNESCO (2005) World Report United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization. *Toward knowledge societies*. Conde-sur-Noireau, France: Imprimerie Corlet.

Viennot, L., & Décamp, N. (2018). Activation of a critical attitude in prospective teachers: From research investigations to guidelines for teacher education. *Physical Review Physics Education Research*, 14(1), 010133. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.010133

Villani, C. (2021). Mathematics in the Society. *Plenary Lecture at ICME-14.*

Williams, J. (2016). Becoming un-disciplined with science and mathematics education. In: Hobbs, L., Campbell, C. & Xu, L. (Eds.)(2019). *Deakin STEM Education Conference 2016/2018*. Selected works. Waurn Ponds: Deakin University

Williams, J., Roth, W.-M., Swanson, D., Doig, B., Groves, S., Omuvwie, M., Borromeo Ferri, R., & Mousoulides, N. (2016). *Interdisciplinary mathematics education: A state of the art* (ICME-13 topical surveys). Dordrecht, Nl: Springer. http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-319-42267-1